UNIVERSIDAD NACIONAL DE SGO. DEL ESTERO

Programa "Ingreso Universitario - Modalidad Mayores de 25 años sin título secundario"

MÓDULO DE MATEMÁTICAS

Profesora Corvalán Valeria

2020

INDICE

UNIDAD 1

CONJUNTOS NUMÉRICOS

MAGNITUDES PROPORCIONALES

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Números Naturales (N)

Los primeros números utilizados por los seres humanos fueron los números naturales: 1, 2, 3, 4, ... El conjunto de Números Naturales se denota con $\mathbb{N}$:

$$N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

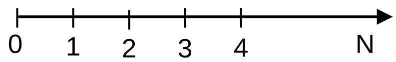
Si se incluye el cero se escribe N_0:

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

El conjunto de NUMEROS NATURALES posee las siguientes propiedades:

- Es un conjunto ordenado según la relación de menor
- Tiene primer elemento
- Es un conjunto infinito (no tiene último elemento)
- No es denso, es discreto porque entre dos elementos cualesquiera existe un número finito de números naturales

Este conjunto se puede representar en una recta numérica:



En la recta puede verse el orden de estos números, por ejemplo:

- 0 es menor que 2, en símbolos: $0 < 2$
- 4 es mayor que 3, $4 > 3$

En general, el número α es mayor que β ($\alpha > \beta$), si α se encuentra a la izquierda de β.

Operaciones en el conjunto de Números Naturales

1. ADICION o SUMA

$$\underbrace{1 + 3 + 4}_{\text{Sumandos}} = 8 \leftarrow \text{Suma o resultado}$$

<u>Propiedades de la adición o suma:</u>

1.- La suma cumple la ley de clausura, es decir, la suma de números naturales tiene como resultado otro número natural.

$$\forall \alpha, \beta \in N : \alpha + \beta \in N$$

2.- La suma es asociativa, es decir, que el resultado no varía si se realizan sumas parciales

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{N} : \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

3.- La suma es conmutativa, es decir, el orden de los sumandos no altera la suma

$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{N} : (\alpha + \beta) = (\beta + \alpha)$$

4.- Existencia de elemento neutro: el cero es el elemento <u>neutro</u> para la suma

$$\forall \alpha \in \mathrm{N} : (\alpha + 0) = (0 + \alpha) = \alpha$$

2. MULTIPLICACIÓN

Los términos de una multiplicación se llaman FACTORES, el resultado de la multiplicación se denomina PRODUCTO.

1 . 3 . 4= 12 ← Producto

Factores

<u>Propiedades del producto:</u>

1.- El producto es una ley de composición interna, es decir, el producto de números naturales tiene como resultado otro número natural.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{N} : \alpha \,.\, \beta \in \mathrm{N}$$

2.- El producto es asociativo, es decir, que el resultado no varía si se realizan productos parciales

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{N} : \alpha\ (\beta \,.\, \gamma) = (\alpha \,.\, \beta)\ \gamma$$

3.- El producto es conmutativo, es decir, el orden de los factores no altera el producto

$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{N} : (\alpha \,.\, \beta) = (\beta \,.\, \alpha)$$

4.- Existencia de elemento neutro: el uno es el elemento <u>neutro</u> para el producto

$$\forall \alpha \in \mathrm{N} : (\alpha \,.\, 1) = (1 \,.\, \alpha) = \alpha$$

5.- La multiplicación es distributiva con respecto a la suma.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{N} : \alpha\ (\beta + \gamma) = (\alpha \,.\, \beta) + (\alpha \,.\, \gamma)$$

3. RESTA O DIFERENCIA

8 - 4= 4 ← diferencia o resta

sustraendo

minuendo

La sustracción o resta de dos números naturales existe si y sólo si el minuendo es mayor que el sustraendo.

Propiedades de la resta o diferencia:

1.- La resta no es asociativa, es decir, que el resultado varía de acuerdo a como se asocien los términos. Por ejemplo:

$$10 - (4 - 1) = 7 \text{ no es igual a } (10 - 4) - 1 = 5$$

2.- La resta no es conmutativa. Por ejemplo:

6 - 4 está definida en el conjunto de los naturales pero 4 – 6 no está definida en N

3.- La multiplicación es distributiva con respecto a la diferencia.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : \alpha\,(\beta - \gamma) = (\alpha\,.\,\beta) - (\alpha\,.\,\gamma)$$

4. DIVISION O COCIENTE

Dividendo → **19** | **2** ← Divisor

Resto → **1** **= 9** ← Cociente

En la división se verifica que:

DIVIDENDO = DIVISOR . COCIENTE + RESTO

Para que la división sea exacta el dividendo debe ser múltiplo del divisor.

5. POTENCIACION

Exponente ↓

Base → $\mathbf{2^3 = 2.2.2 = 8}$ ← Potencia

La potenciación es un caso particular de producto: todos los factores son iguales

En general, la n-ésima potencia puede expresarse simbólicamente como:

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha\,.\,\alpha\,.\,\alpha\,....\,\alpha}_{\text{n veces}}$$

La base es el número que se multiplica y el exponente indica las veces que se multiplica la base

α^n se lee alfa elevado a la ene

4^3 se lee cuatro a la tercera potencia o cuatro al cubo

Propiedades de la potenciación:

1.- La potenciación **no es conmutativa**, por ejemplo:

5^2 no es igual a 2^5

2.- La potenciación **no es distributiva con respecto a la suma y a la diferencia**, por ejemplo:

$(2 + 3)^2 = 25$ es distinto a $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

3.- La potenciación **es distributiva con respecto al producto y al cociente**

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : (\alpha \, . \, \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} \, . \, \beta^{\gamma}$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : (\alpha : \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} / \beta^{\gamma}$$

4.- **Producto de potencias de igual base**: el producto de potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes de las potencias dadas.

En símbolos:

$$\alpha^{n} \, . \, \alpha^{m} = \alpha^{m+n}$$

$$6^{3} \, . \, 6^{2} = 6^{3+2} = 6^{5}$$

5. **Cociente de potencias de igual base**: el cociente de potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es igual a la diferencia entre los exponentes de las potencias dadas

En símbolos:

$$\alpha^{n} : \alpha^{m} = \alpha^{m-n}$$

$$3^{4} : 3^{2} = 3^{4-2} = 3^{2}$$

6. **Potencias de potencia**: la potencia de otra potencia es una potencia de la misma base cuyo exponente es igual al producto de los exponentes dados

$$(\alpha^{n})^{m} = \alpha^{n \, . \, m}$$

$$(4^{2})^{3} = (4)^{6}$$

Exponente cero

El exponente cero aparece cuando se dividen dos potencias iguales:

$$2^{4}:2^{4}=2^{4-4}=2^{0}$$

Pero, en este caso estamos dividiendo un número por sí mismo

$$2^{4}:2^{4}=1$$

Luego:

$$2^{0}=1$$

Todo número natural distinto de cero elevado a la cero da por resultado 1

6. RADICACIÓN

La radicación es la operación inversa a la potenciación.

Indice

$$\sqrt[3]{8} = 2 \leftarrow \text{Raíz}$$

Radicando

n general, la raíz enésima de un natural en lenguaje simbólico es:

$$\sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^{n} = \alpha$$

Propiedades de la radicación:

1.- La radicación **no es conmutativa**, por ejemplo:

$$\sqrt[3]{8} \text{ no es igual a } \sqrt[8]{3}$$

2.- La radicación no es distributiva con respecto a la suma y a la diferencia, por ejemplo:

$$\sqrt{9} - \sqrt{4} = 1 \text{ no es igual a } \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

3.- La radicación **es distributiva con respecto al producto y al cociente**

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N: \sqrt[\gamma]{\alpha \,.\, \beta} = \sqrt[\gamma]{\alpha} \,.\, \sqrt[\gamma]{\beta}$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N: \sqrt[\gamma]{\alpha : \beta} = \sqrt[\gamma]{\alpha} / \sqrt[\gamma]{\beta}$$

4.- La potencia de una raíz es igual a la raíz de la potencia del radicando.

$$\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^m = \sqrt[p]{\alpha^m}$$

$$\left(\sqrt[4]{24}\right)^3 = \sqrt[4]{24^3}$$

5.- La radicación de una raíz es igual a una raíz cuyo índice es igual al producto de los índices.

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{\alpha}} = \sqrt[p.q]{\alpha} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{\alpha}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3.2]{64} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$$

6.- Si el índice y el exponente del radicando de una raíz se multiplican o dividen por un mismo número, la raíz no varía.

$$\sqrt[p]{\alpha^q} = \sqrt[p.n]{\alpha^{q.n}} = \sqrt[p:n]{\alpha^{q:n}}$$

$$\sqrt[3]{32^4} = \sqrt[3.2]{32^{4.2}} = \sqrt[3:2]{32^{4:2}}$$

Números Enteros

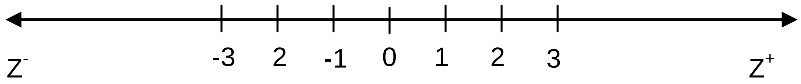
La sustracción o resta de dos números naturales existe si y sólo si el minuendo es mayor que el sustraendo. Para resolver el caso contrario, surgió el conjunto de los números enteros que se denota con Z. Este conjunto está formado por el conjunto de números naturales (o enteros positivos), el cero, y el conjunto de los enteros negativos, simbólicamente:

$$Z = N \cup \{0\} \cup Z^-$$

El conjunto de NUMEROS ENTEROS posee las siguientes **propiedades**:

- Es un conjunto infinito
- Cada número entero tiene un único antecesor y un único sucesor.
- Es un conjunto discreto, es decir entre dos números enteros existe un conjunto finito de números enteros.
- Cada número entero tiene opuesto (el opuesto de α es $-\alpha$ y el opuesto de $-\alpha$ es α)

Este conjunto se puede representar en una **recta numérica**:



Valor absoluto de un número entero

El valor absoluto de un número entero α, se indica como $|\alpha|$, es por definición igual a α si α es un número entero positivo o cero, e igual al opuesto de α si α es un número negativo. Simbólicamente:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \text{ si } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Puede decirse también que el valor absoluto o módulo de un número entero α es la distancia al cero, **la distancia es un número positivo.** Por ejemplo,

$$|6| = 6; |-4| = 4$$

Orden en el conjunto de números enteros

En la recta numérica, la flecha indica el orden creciente en valor absoluto. Puede afirmarse que:

- ✓ Dados dos números positivos, es mayor el de mayor valor
- ✓ **Dados dos números negativos es mayor el de menor valor absoluto**
- ✓ Todo número positivo es mayor que cero
- ✓ Todo número negativo es menor que cero

Puede observarse en la recta numérica que, por ejemplo, 3 >0; 2 < 3; -5 < -1; -3 < 1, etc.

Operaciones en el conjunto de Números Enteros

Dada la correspondencia entre los números naturales y los números positivos las operaciones en Z verifican las mismas propiedades que en N y además deben ampliarse.

1. SUMA O ADICIÓN

En la suma de números enteros se pueden presentar los siguientes casos:

a) Suma de números enteros del mismo signo

La suma de dos números enteros del mismo signo es otro número entero tal que su signo es igual al de los sumandos y su valor absoluto es igual a la suma de los valores absolutos de los sumandos.

Por ejemplo:

(+2)+(+3)= 2+3=5 (-4)+(-5)= - 9

b) Suma de números enteros de distinto signo

La suma de dos números enteros de distinto signo es otro número entero tal que su signo es igual al del número de mayor valor absoluto y su valor absoluto es igual a la diferencia de los valores absolutos de los sumandos.

Por ejemplo:

(+10)+(-3)= +7 (4)+(-9)= - 5

2. MULTIPLICACION O PRODUCTO

En el producto de números enteros se pueden presentar los siguientes casos:

a) Producto de números enteros del mismo signo

El producto de dos números enteros del mismo signo es otro número entero tal que su signo es positivo y su valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Por ejemplo:

(+2).(+3)= +6 (-4).(-5)= +20

b) Producto de números enteros de distinto signo

El producto de dos números enteros de distinto signo es otro número entero tal que su signo es negativo y su valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Por ejemplo:

(+10).(-3)= - 30 (4).(-9)= - 36

c) Producto de varios números enteros

El producto de varios factores distintos de cero es otro número entero tal que su signo es positivo si el número de factores negativos es par y negativo si el número de factores negativos es impar y su valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Por ejemplo:

(+1).(-3).(-2) = +6 (2 factores negativos) (4).(-2) (-2)(-3)= - 48

En la Tabla 1 se presentan, simbólicamente, las propiedades de la suma y del producto.

Tabla 1. Propiedades de la suma y el producto

Propiedad	**Suma**	**Producto**
Clausura	$\forall \alpha, \beta \in Z : \alpha + \beta \in Z$	$\forall \alpha, \beta \in Z : \alpha \,.\, \beta \in Z$
Conmutatividad	$\forall \alpha, \beta \in Z : (\alpha + \beta) = (\beta + \alpha)$	$\forall \alpha, \beta \in Z : (\alpha \,.\, \beta) = (\beta \,.\, \alpha)$
Asociatividad	$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Z : \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Z : \alpha \,(\beta \,.\, \gamma) = (\alpha \,.\, \beta)\, \gamma$
Distributividad	$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Z : \alpha \,(\beta + \gamma) = (\alpha \,.\, \beta) + (\alpha \,.\, \gamma)$	
Existencia de elemento neutro	$\forall \alpha \in Z : (\alpha + 0) = (0 + \alpha) = \alpha$	$\forall \alpha \in Z : (\alpha \,.\, 1) = (1 \,.\, \alpha) = \alpha$
Existencia de opuesto	$\forall \alpha \in Z, \exists - \alpha \in Z / \alpha + (-\alpha) = 0$	

3. RESTA

La diferencia de dos números enteros puede definirse como la suma del primero más el opuesto del segundo, simbólicamente:

$$\alpha, \beta \in Z : \alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Por ejemplo:

(+10)-(-3)= (+10) +[-(-3)]= (+10)+(+3)=13

(-2)-(+9)= (-2) + (-9)= -11

4. DIVISION

La división exacta de dos números enteros, es decir que el resto sea igual a cero, no siempre es posible, es necesario que el dividendo sea múltiplo del divisor.

División exacta de números enteros

Si se da este caso, entonces el resultado es otro número entero tal que su signo es positivo si los números tiene el mismo signo, es negativo si los números tienen distinto signo y el valor absoluto es el cociente de los valores absolutos de los números dados.

Por ejemplo:

(+64):(+8)= (+8)   (-24):(+6)= - 4

5. POTENCIACION

La definición de n-ésima potencia dada para los números naturales es válida para los enteros, así como también las potencias con exponente 0 y 1. En lenguaje simbólico:

$$\forall \alpha \in Z \wedge n \in N : \alpha^n = \underbrace{\alpha.\alpha.\alpha \ldots \alpha}_{\text{n veces}}$$

$$\forall \alpha \in Z - \{0\} : \alpha^0 = 1$$

$$\forall \alpha \in Z : \alpha^1 = \alpha$$

La potencia de un número entero es negativa cuando la base es negativa y el exponente impar, en el resto de los casos es positiva.

Por ejemplo:

$(-2)^3$= - 8 $(-2)^4$= 16

La potenciación de números enteros cumple las mismas propiedades que la potenciación de números naturales.

6. RADICACION

La definición de raíz n-ésima dada para los números naturales es válida para los enteros.

$$\alpha \in Z \, \text{y} \, n \in N, \text{siendo} \, n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^n = \alpha$$

Si el índice de la raíz es impar, la raíz tiene el mismo signo que el radicando.

Si el índice es par y el radicando es positivo, las raíces son dos números opuestos.

Si el índice es par y el radicando es negativo, la raíz no tiene solución en Z.

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{+27} = +3 \, \text{puesto que} \, (+3)^3 = 27$$

$$\sqrt[4]{+16} = \pm 2 \, \text{puesto que} \, (+2)^4 = +16 \, \text{y} \, (-2)^4 = +16$$

La radicación cumple con las propiedades de la radicación de números naturales y puede mencionarse otra propiedad:

Si el índice y el exponente del radicando son iguales:

a) *la raíz es igual a la base de la potencia cuando el exponente es impar*

b) *la raíz es igual al valor absoluto de la base de la potencia cuando el exponente es par.*

Por ejemplo:

$\sqrt[3]{(2)^3} = \sqrt[3]{8} = 2$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = +4$

Números Racionales

En el conjunto de los números enteros, si el dividendo no es múltiplo del divisor, la división no puede realizarse. Para solucionar este problema surge el conjunto de los números racionales que se simboliza con Q.

Dados α, $\beta \in Z$, $\beta \neq 0$, se denomina número racional a la fracción $\frac{\alpha}{\beta}$

$$\frac{\alpha}{\beta} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{numerador} \\ \longleftarrow \text{denominador} \end{array}$$

<u>Clasificación de fracciones</u>

1.- Son *fracciones equivalentes* las que representan el mismo punto en la recta numérica y resultan de multiplicar numerador y denominador por el mismo número. Por ejemplo: $\frac{1}{3};\frac{2}{6};\frac{3}{9}$.

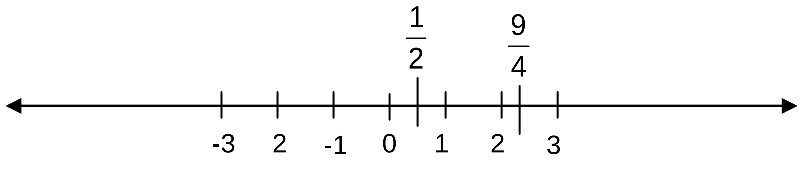
2.- Son *fracciones irreductibles* aquellas cuyo numerador y denominador son números coprimos, es decir no tienen divisores comunes. Por ejemplo: $\frac{2}{7};\frac{8}{9};\frac{3}{11}$.

3.- Son *fracciones aparentes* aquellas cuyo numerador es múltiplo del denominador. Son números enteros. $\frac{4}{2};\frac{12}{4};\frac{9}{3}$

El conjunto de NUMEROS RACIONALES posee las siguientes **propiedades**:

- Es un conjunto infinito
- Es un conjunto denso, es decir entre dos números racionales existe un conjunto infinito de números racionales.
- Es un conjunto ordenado.

Este conjunto se puede representar en una **recta numérica**:



<u>Orden en el conjunto de números racionales</u>

Para comparar dos números racionales $\frac{\alpha}{\beta}$ y $\frac{\gamma}{\delta}$ se debe considerar lo siguiente:

✓ $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha.\delta < \beta.\gamma$

✓ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha.\delta = \beta.\gamma$

✓ $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha.\delta > \beta.\gamma$

Operaciones en el conjunto de Números Racionales

Las cuatro operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación y división) tienen solución en Q, es decir son operaciones cerradas.

1.- SUMA O RESTA

Para sumar o restar fracciones es necesario que tengan el mismo denominador.

Para reducir fracciones a común denominador:

- ✓ se determina el máximo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores de las fracciones.
- ✓ Se calculan las fracciones equivalentes de cada término con ese denominador

En símbolos, $\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha.\delta \pm \beta.\gamma}{\beta.\delta}$

Por ejemplo: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1.3 + 2.2}{2.3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$

2.- PRODUCTO

El producto de dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de los factores, y cuyo denominador es el producto de los denominadores de los factores.

En símbolos: $\frac{\alpha}{\beta} . \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha.\gamma}{\beta.\delta}$

Por ejemplo: $\frac{1}{2} . \frac{2}{3} = \frac{1.2}{2.3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3.- DIVISION

El cociente entre dos fracciones es igual al producto entre el dividendo y el inverso multiplicativo del divisor.

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} . \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{-1} = \frac{\alpha}{\beta} . \frac{\delta}{\gamma} \text{ con } \beta, \gamma \neq 0$$

<u>Inverso multiplicativo</u>

Dada una fracción $\frac{\gamma}{\delta}$, su inverso multiplicativo $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{-1}$ es otra fracción tal que multiplicada por la primera da por resultado 1. El resultado de $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{-1}$ es $\frac{\delta}{\gamma}$.

Si por ejemplo se tiene que dividir $\frac{4}{5}$ entre $\frac{2}{3}$:

$$\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}.\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{4}{5}.\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

4. POTENCIACION

Se consideran dos casos:

a) Potencia de exponente natural

Para elevar una fracción a la n-ésima potencia se eleva numerador y denominador a la n, en símbolos:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=\frac{\alpha^n}{\beta^n}$$

b) Potencia de exponente negativo

Una fracción de exponente negativo se puede transformar en una potencia tal que la base es la inversa de la base de la potencia dada y el exponente es positivo y de igual valor absoluto que el exponente de la potencia dada. Simbólicamente:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-n}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \text{ con } \alpha \neq 0$$

c) **Potencia de exponente racional**

La potencia $\frac{p}{q}$ *de una fracción se obtiene calculando la raíz q-ésima de la potencia p-ésima del número.* En símbolos: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^p}$

Se cumplen las mismas propiedades que la potenciación de números naturales y enteros.

5. RADICACION

Simbólicamente:

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{x}{y}\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{\alpha}{\beta}$$

La regla de los signos es la misma que la enunciada para la radicación de números enteros.

Estas operaciones verifican las propiedades descriptas para números naturales y enteros. Se debe tomar en cuanta que el denominador debe ser distinto de cero.

Notación científica

La notación científica es una forma de expresión que permite operar fácilmente con números muy grandes o muy pequeños puesto que simplifica el modo de representarlo. El número en esta notación se expresa como el producto de un número cuyo valor absoluto sea mayor o igual que 1 y menor que 10 y una potencia de base 10 cuyo exponente indica la cantidad de ceros a la izquierda (si el exponente es negativo) o a la derecha (si el exponente es positivo) de la coma decimal. Prácticamente, si la coma se corre a la izquierda, la potencia en base 10 será positiva, y el exponente indica, como se mencionó anteriormente, la cantidad de ceros a la derecha de la coma decimal; y si si la coma se corre a la derecha, la potencia en base 10 será negativa.

Por ejemplo:

2.000.000 se puede expresar como 2.10^{6}

0,000000012 se puede expresar como $1{,}2.10^{-8}$

Números Irracionales

Los números irracionales se denominan así por la imposibilidad de expresarlos como una fracción.

Un número es irracional si su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Dos ejemplos muy conocidos son: $\sqrt{2} = 1{,}414213562 \ldots$ y $\pi = 3{,}141592654 \ldots$

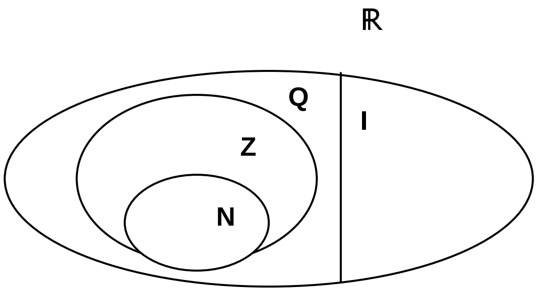
El conjunto de números irracionales se denota con I.

La representación gráfica de estos números completa la recta numérica.

Números Reales

La unión del conjunto de números irracionales, I, con el conjunto de los racionales Q da como resultado un nuevo conjunto que es el de los números reales. Este se denota con R.

Se tiene entonces: $\mathbb{R} = Q \cup I$ y además $N \subset Z \subset Q \subset \mathbb{R}$. Esquemáticamente:



El conjunto de NUMEROS REALES posee las siguientes **propiedades**:

- Es un conjunto infinito
- Es un conjunto denso, es decir entre dos números reales existe un conjunto infinito de números reales.
- Es un conjunto ordenado.

Este conjunto ocupa toda la **recta numérica**.

En el conjunto de NUMEROS REALES las operaciones suma, resta, multiplicación, división, cumplen con las propiedades de **clausura, conmutatividad, asociatividad, distributividad (de suma o resta respecto del producto o cociente), existencia de**

elemento neutro, existencia de opuesto. Potenciación y radicación verifican todas las propiedades detalladas para todos los conjuntos numéricos incluidas en este conjunto infinito de números reales.

Trabajo Práctico N°1
Conjuntos numéricos

Números naturales

1. Calcule el resultado de las siguientes expresiones combinadas

a) $3 + 5 \cdot (4 - 3)$
b) $3 \cdot (4 + 2) - 3$
c) $3 \cdot (6 - 2) + 4 \cdot (2 + 3)$
d) $12 - (3 + 4 \cdot 2 - 1) + 4$
e) $18 - 4 \cdot (4 \cdot 2 - 6) + 15 : 3$
f) $5 \cdot (7 - 3 \cdot 2) - 12 : 4$
g) $8 : (2 \cdot 4) + 6 : (3 \cdot 2)$
h) $4 \cdot 6 : 3 - (10 - 12 : 2 + 1)$

2. Calcule las siguientes potencias:

a) 2^5; b) 4^3; c) 5^0; d) 12^2; e) 9^3

3. Aplicando las propiedades de potencias de igual base resuelva:

a) $\dfrac{\alpha^2\alpha^8}{\alpha^3\alpha}$; b) $\dfrac{\alpha^3\alpha^1\beta^5}{\alpha^2\beta^3}$

4. Calcule las siguientes raíces:

a) $\sqrt{4}$; b) $\sqrt[3]{27}$; c) $\sqrt[4]{16}$; d) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2$; e) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$

Números enteros

5. Coloque el signo que corresponda: mayor, menor o igual.

a) $-3 \ldots -12$ b) $|-2| \ldots -2$ c) $0 \ldots 5$ d) $6 \ldots 5$ e) $-(-5) \ldots |-5|$ f) $0 \ldots -3$

6. Calcule las siguientes:

a) sumas:
i) (-9) + (+12) + (+8) + (-21)+ (-1)
ii) (+10) + (-4) + (+11) + (-2)

b) diferencias:
i) (+24) – (+15)
ii) (+12) – (+32)

c) productos
i) (-10) . (+.2) . (+4)
ii) (-11) . (+3). (-2) . (+6) . (+4)

c) cocientes
i) (-32) : (-8)
ii) (+30) : (-6)

7. Realice las siguientes operaciones:

a) {(+15) - [(+4) - (-6) + (+3)]}
b) (-14) + (-6) + [(-8) - (-2) + (-1) - (+4)]
c) – [(-7) + (-2)] + [(-9) – (-2) – (-1)] - (+30)
d) – {(-6) + [(-2) – (-10)] + [(-1)-(+2)]} + (+12)

8. Resuelva las siguientes operaciones combinadas

a) (-10 – 8) : (-9) + (- 3).(-4)

b) [(+10). (-3) – (-2). (+3)]: (- 4 + 1)

c) {18 - [3 + 18 : (3 · 2)]} : (9 - 3)

d) 12 - [(3 · 4 + 2) - (9 - 2 · 3)]

9. Resuelva aplicando las propiedades convenientes de la potenciación:

a) $(-3)^3 . (-2) . (-4)^0$

b) $\{[(-2)^2]^3\}^4$

c) $[(-3) . 2(-5)]^3$

d) $[2 . (-2) + (-4)^2]^3$

e) $[(-4)^8 : (-2)^2] . (-3)^3$

10. Resuelva aplicando las propiedades convenientes de la radicación:

a) $\sqrt{25.36.64}$

b) $\sqrt[3]{8.27.64}$

c) $\sqrt[5]{-32}.(-2+4):(-2)^2$

d) $(-6+2)^3 : 2 - \sqrt[3]{64}.(-2)^0$

Números racionales

11. Calcule la fracción irreducible equivalente a cada una de las dadas.

a) $\frac{30}{15}$ b) $\frac{42}{49}$ c) $-\frac{24}{54}$ d) $\frac{81}{45}$

12. Escriba fracciones equivalentes a las indicadas.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{8}$

13. Escriba mayor, menor o igual, según corresponda:

a) $\frac{1}{5}\cdots\frac{2}{3}$ b) $-\frac{2}{10}\cdots\frac{7}{49}$ c) $\frac{14}{25}\cdots-\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{81}\cdots\frac{2}{3}$

14. Encuentre el resultado de:

a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+\frac{5}{8}$ b) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ c) $\frac{4}{3}+\frac{7}{8}+\frac{3}{9}$ d) $\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-\frac{5}{4}$

15. Determine el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{4}{3}:\frac{1}{8}\right).\left(\frac{8}{20}:\frac{10}{2}\right)$ b) $\left(\frac{5}{21}:\frac{3}{25}\right).\left(\frac{8}{20}:\frac{10}{2}\right)$ c) $\left(-\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{3}{8}\right)$

16. Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\left[\left(2-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{4}:\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right].\frac{1}{9}$

b) $\left[\left(\frac{3}{4}-3\right)+\frac{1}{9}:3\right]:\left(-\frac{3}{2}+5-\frac{7}{6}\right)$

c) $\dfrac{\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{10}\right).\left(-\frac{3}{2}\right):\frac{4}{3}}{-3+\frac{1}{8}}:\frac{2}{9}$

d) $\dfrac{\left(\frac{2}{5}:5\right)+\left(-\frac{6}{7}\right)}{-\frac{3}{4}:\frac{5}{8}-\frac{2}{9}}+4$

17. Calcule las siguientes:

a) potencias

i) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ ii) $\left(\frac{2}{9}\right)^2$ iii) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}$ iv) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

b) raíces

ii) $\sqrt[3]{\frac{8}{64}}$ ii) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$ iii) $\sqrt{-\frac{1}{36}}$ iv) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$

18. Efectúe las siguientes operaciones combinadas:

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}.\left(-\frac{5}{8}\right):\frac{2}{3}$

b) $-\frac{1}{9}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right).\left(\frac{3}{2}\right).\left(\frac{4}{7}\right)}$

c) $\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{1}{64}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

d) $\sqrt{1-\frac{7}{16}}.(-2)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}:\frac{3}{2}$

19. Exprese en notación científica las siguientes cantidades:

a) 300 000 000
b) -7894,34
c) 0,000 000 1
d) 456,987
e) 0,000 000 62
f) 0, 000 000 9
g) -18 400 000 000
h) 0, 000000000 93
i) 0, 00120
j)5480000

Problemas de aplicación

I) Un camión transporta 5000 L de leche para suministrar a tres fábricas de productos lácteos. En la primera descarga 1500 L, y en la segunda, 865 L. Después de abastecer a la tercera fábrica, todavía quedan 1975 en la cisterna del camión; ¿con cuántos litros se ha aprovisionado a esta última?

II) En una panadería se dispone de 40 docenas de huevos para hacer 50 bizcochuelos y con los huevos que sobren, algunas galletas. Por cada bizcochuelo se emplean 6 huevos, y por cada docena de galletas, 4 huevos. ¿Cuántas galletas podrán hacerse?

III) En una granja avícola se han recogido 6500 huevos. En el control de calidad se retiran 260,

Con el resto se preparan 120 cajas de dos docenas y los demás se reparten en cajas de una docena. ¿Cuántas cajas de una docena se preparan en total?

IV) Se tiene un campo de 12 ha por 4 ha. Se quiere arar los dos tercios del campo ¿Cuántas ha quedarán sin arar?

V) La compra de reactivos de un laboratorio de análisis de suelos costó $ 4500.- Si un quinto del total corresponde a solventes orgánicos, dos tercios a reactivos sólidos y el resto a reactivos líquidos ¿Cuál es el monto en pesos de cada uno de estos insumos?

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Razones y proporciones

Se denomina **razón** entre dos números a y b (b $\neq$ 0), al cociente de la división de a por b. El primer número se denomina *antecedente* y el segundo *consecuente*. En símbolos:

$$a : b \text{ o bien } \frac{a}{b}$$

Por ejemplo, el porcentaje es una razón entre un número y 100, la densidad de una sustancia es la razón entre la masa y el volumen de dicha sustancia, el número de moles de un compuesto químico es una razón entre la masa y su peso molecular.

Se denomina **proporción** a la igualdad de dos razones. Dados cuatro números a, b, c, d, distintos de cero, en ese orden, forman una proporción cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón de los dos últimos. En símbolos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \ \textbf{a} \text{ es a } \textbf{b} \text{ como } \textbf{c} \text{ es a } \textbf{d}$$

Se denominan *extremos* de la proporción a **a** y **d**, **b** y **c** se llaman *medios*.

Las proporciones cuyos medios son iguales se llaman proporciones contínuas, por ejemplo:

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{16} \qquad \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$$

Propiedades de las proporciones

Propiedad fundamental: en toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \,.\, d = c \,.\, b$$

En el ejemplo anterior $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$, 1 . 16= 4 . 4, 16 = 16

Cálculo de un elemento de una proporción

Para calcular un elemento de una proporción es suficiente aplicar la propiedad fundamental. Considerando que se desea calcular un extremo, simbólicamente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow a \,.\, x = c \,.\, b, \ x = \frac{b \,.\, c}{a}$$

Magnitudes proporcionales

Magnitud es toda propiedad que se puede medir, por ejemplo el tiempo, el peso, la superficie, el volumen, la longitud, etc.

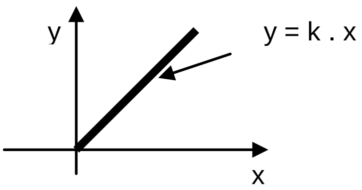
Las magnitudes pueden ser **directa** o **inversamente** proporcionales.

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes x y y, son directamente proporcionales cuando están relacionadas por la *función* **y = k . x**, siendo k un número distinto de cero que se denomina constante, factor o coeficiente de proporcionalidad. El cociente entre pares de cantidades correspondientes es siempre el mismo, es constante, $\frac{y}{x} = k$

Representación gráfica de una función de proporcionalidad directa

La función y = k . x se representa mediante una recta que pasa por el origen de coordenadas.



Por ejemplo, la tabla que sigue representa la cantidad de conservador en kg que se agrega a distintas cantidades de un producto alimenticio.

Producto (tn)	20	30	40	50
Conservador (kg)	2	3	4	5

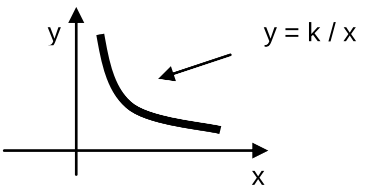
El cociente entre el conservador y la masa de producto elaborado es siempre 0,1, por lo tanto las magnitudes son directamente proporcionales. Si x es la masa del producto y y la del conservador, y= k .x, para la primera columna numérica: 2= k. 20 $\Rightarrow$ k= 2/20=0,1, es decir la constante de proporcionalidad es 0,1. La fórmula es y = 0,1. x. Se puede observar que si se duplica la cantidad de producto se duplica la cantidad de conservador que se debe agregar.

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes x y y, son inversamente proporcionales cuando están relacionadas por la *función* $y = \frac{k}{x}$, siendo k un número distinto de cero que se denomina constante, factor o coeficiente de proporcionalidad. El producto entre pares de cantidades correspondientes es siempre el mismo, es constante, **y . x= k.**

Representación gráfica de una función de proporcionalidad inversa

La función $y = \frac{k}{x}$ se representa mediante una hipérbola equilátera.



Por ejemplo, la tabla que sigue representa la viscosidad de una sustancia en función de la temperatura.

Temperatura (ºC)	20	40	60	80
Viscosidad (Pa.s)	1,8	0,9	0,6	0,45

El producto entre la viscosidad y la temperatura es siempre 36, por lo tanto las magnitudes son inversamente proporcionales. Si x es la temperatura y y la viscosidad, y= k / x, para la primera columna numérica: 1,8= k / 20 $\Rightarrow$ k= 1,8 . 20=36, es decir la constante de proporcionalidad es 36. La fórmula de la función de proporcionalidad inversa en este caso es: y= 36 / x

Problemas de regla de tres

Son problemas en los que se involucran magnitudes proporcionales en los que conocido un par de elementos correspondientes y otro de una de las magnitudes, se debe calcular el elemento que le corresponde en la otra magnitud.

Si interviene sólo dos magnitudes, la regla de tres es **simple**.

Si las magnitudes son directamente proporcionales, la regla de tres es **directa** y si son inversamente proporcionales la regla es **inversa**.

Para resolver este tipo de problemas se utilizan las definiciones y propiedades de las magnitudes proporcionales.

Trabajo Práctico N° 2

Magnitudes proporcionales

Razones y proporciones

1. Calcule el extremo desconocido de las proporciones:

a) $\frac{x}{3} = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{2}{9}}$ b) $\frac{\frac{12}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{2}{24}}{x}$ c) $\frac{0{,}4}{x} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{28}{3}}$ d) $\frac{2+\frac{1}{3}}{x} = \frac{4+\frac{1}{4}}{\left(3-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$

3. Las tablas que siguen representan a magnitudes directamente proporcionales. Calcule los elementos que faltan. Represente gráficamente

a)

x	8	4		12
y	24		48	

b)

x	120	60		15
y	200		50	

4. Las tablas que siguen representan a magnitudes inversamente proporcionales. Calcule los elementos que faltan. Represente gráficamente.

a)

x	4		6	
y	9	3		2

b)

x	10	60		8
y	48		12	

Problemas de aplicación

I) Una cooperativa posee un campo de 300 ha en el que se ha sembrado un 36 % de la superficie con maíz, 12 % con soja y el resto con alfalfa. ¿Cuántas hectáreas corresponden a cada vegetal sembrado?

II) Para la elaboración de 100 kg una mermelada se necesitan 50 kg de fruta y 60 kg de azúcar. ¿Cuántos kg de cada ingrediente se necesitan para elaborar 500 kg?

III) En una granja avícola los pollos consumen 4 tn de alimento balanceado por semana. ¿Cuántas tn de alimento consumen mensualmente?

IV) La inversión en agroquímicos es de $ 40000 para un área sembrada de 200 ha, si el área es 350, ¿cuánto se deberá invertir?

UNIDAD 2

FUNCIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

SISTEMAS ELEMENTALES DE ECUACIONES LINEALES

Función de primer grado

Una gran cantidad de relaciones que se utilizan en forma cotidiana involucran a dos o más variables de manera que el valor de una de ellas depende del valor de las otras. Por ejemplo, el volumen que ocupa un gas depende de la presión que soporta; la distancia recorrida por un auto depende de la velocidad; el sueldo que cobra una persona está en función de su trabajo, etc.

Si se consideran dos variables que están relacionadas de manera que a cada valor de una de ellas le corresponde un único valor de la otra, la relación que existe entre ellas se denomina **función**.

Una variable **y** se dice que es **función** de otra variable **x**, cuando a cada valor de **x** le corresponde **uno y sólo un valor** de **y**. En símbolos se escribe **y=f(x)** que se lee “y es igual a f de x o y es función de x”. A **x** se la denomina **variable independiente** y a **y variable dependiente.** El conjunto de valores que puede tomar la variable independiente se llama conjunto de partida o dominio de la función D(f) y el conjunto de valores de y se designa como conjunto de llegada, codominio o imagen de la función Im(f).

Las funciones se designan con letras minúsculas f, g, h, etc. Simbólicamente, se escribe f: $x \to y$, se lee f aplica x en y o f transforma x en y. Si A es el conjunto de partida y B el de llegada se puede escribir f: $A \to B$. Si los conjuntos involucrados son numéricos las funciones se denominan funciones numéricas o escalares.

- ✓ La función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \to ax + b$

donde a y b son constantes y pertenecientes al conjunto de los números reales R y con $a \neq 0$ se llama **función lineal** o **función de primer grado en la variable x**. Puede definirse como un conjunto de pares ordenados de la forma: $f = \{(x,y) \in R \times R / \ y = ax + b; \ a \wedge b \in R \ ; a \neq 0\}$

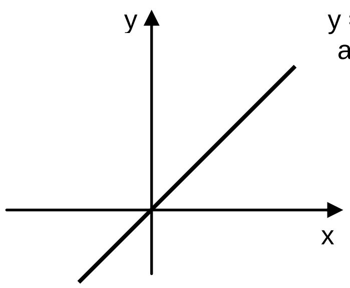
La función lineal puede representarse gráficamente en el plano real como una **línea recta**, la igualdad y = ax + b se denomina ecuación explícita de la recta.

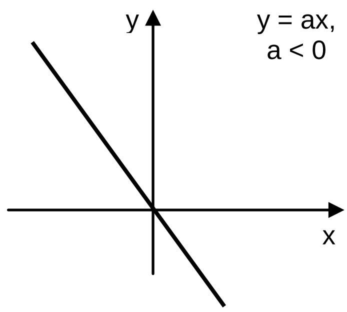
$y = a\,x + b \leftarrow$ Parámetro de posición, u **ordenada al origen**

Parámetro de dirección, coeficiente angular o **pendiente**

Casos particulares

a) Si b = 0, la ecuación se escribe y = ax, y representa a una recta que pasa por el origen de coordenadas.

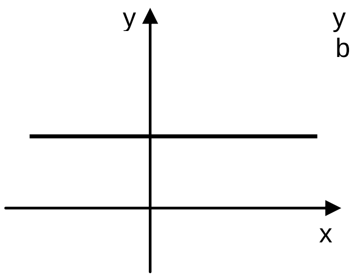


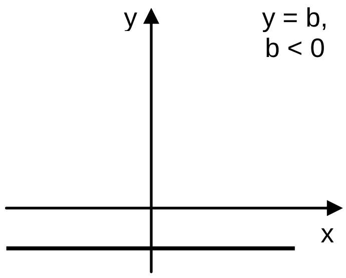


Como puede observarse D(f) = ℝ y Im(f)= ℝ.

En particular si a = 1, la ecuación se transforma en y = x, es la **función identidad** y su gráfica es la recta llamada 1º bisectriz o también recta de 45º.

b) Si a = 0 y b $\neq$ 0, la ecuación se escribe y = b. La función definida por esta ecuación se denomina **función constante** y su representación grafica es una recta paralela al eje $\overrightarrow{OX}$.





En estos casos D(f) = R y Im(f)= $\{b\}$.

c) Si a = 0 y b = 0, la ecuación se transforma en y = 0. La función definida por esta ecuación se denomina **función nula**, su gráfico es una recta que coincide con el eje $\overrightarrow{OX}$. En este caso D(f) = ℝ y Im(f)= $\{0\}$.

d) El conjunto f = $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = c \wedge c \in \mathbb{R}\}$ que **NO REPRESENTA A UNA FUNCION**, es un conjunto de pares ordenados que se caracteriza por tener la primera componente igual a c y la segunda componente varía en el conjunto R. Su gráfica es una recta paralela al eje $\overrightarrow{OY}$, cuya ecuación es x = c, en este caso **NO TIENE PENDIENTE**.

Ecuación de primer grado o lineal en una variable

Sea la función de primer grado definida por:

$$y = ax + b \qquad (1)$$

si se hace y = 0, la ecuación anterior se expresa como:

$$ax + b = 0 \qquad (2)$$

A esta ecuación (2) se la denomina **ecuación de 1º grado en la variable x.** Como puede verse, el primer miembro de (2) es un polinomio en x, es decir P(x) = 0. Por lo tanto, *resolver una ecuación de 1º grado en la variable x consiste en encontrar los ceros de la función polinomial o las raíces de la ecuación polinómica.*

Como la ecuación es de primer grado con una incógnita, tiene una sola raíz, es decir **un único valor de x satisface la ecuación**. LA SOLUCIÓN ES UNICA.

Geométricamente hallar el valor de x de la ecuación (2) significa encontrar la abscisa del punto que tiene ordenada nula (y=0), es decir el punto de intersección de la gráfica de la función f con el eje $\overrightarrow{OX}$.

Por ejemplo, si se tiene la recta y= 3x + 1, el punto de intersección de ésta con el eje $\overrightarrow{OX}$ es:

$$3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

Ecuación de primer grado en dos variables

Sea la función de primer grado definida por:

$$f=\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / ax + by + c = 0;\ a, b \wedge c \in \mathbb{R}\ ; a \wedge b \neq 0\}$$

a la igualdad

$$ax + by + c = 0 \qquad (3)$$

se la denomina **ecuación de 1° grado con dos incógnitas x** y **y.**

Resolver una ecuación de 1º grado en la variable x consiste en encontrar pares ordenados (x,y) de números reales que verifiquen la ecuación. Los pares ordenados que cumplen con esta condición se llaman soluciones de la ecuación.

Como se expresó anteriormente, la ecuación ax + by + c = 0 con a y b distintos de cero es la expresión de una recta de pendiente $-\frac{a}{b}$ y ordenada al origen $-\frac{c}{b}$, entonces **cada punto de la recta es una solución** de la ecuación (3), por lo tanto esta ecuación tiene INFINITAS SOLUCIONES.

Por ejemplo, dada la ecuación x + 2y - 4 = 0, el conjunto de soluciones es:

$$S=\{(0,2);\ (1,3/2);\ (2,1);\ \ldots\}$$

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

La expresión:

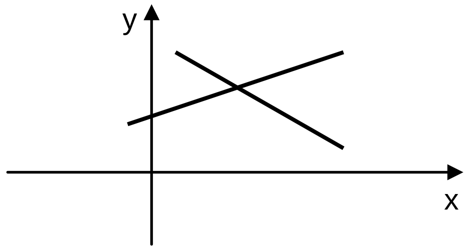
$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 & a_1 \wedge b_1 \neq 0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 & a_2 \wedge b_2 \neq 0 \end{cases}$$

se llama **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

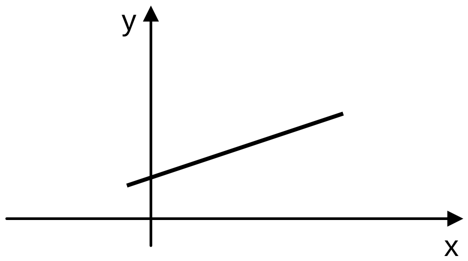
Resolver un sistema de este tipo consiste en encontrar todas las soluciones comunes a las dos ecuaciones, es decir determinar los puntos comunes a las rectas que ambas expresiones representan.

Pueden presentarse tres situaciones:

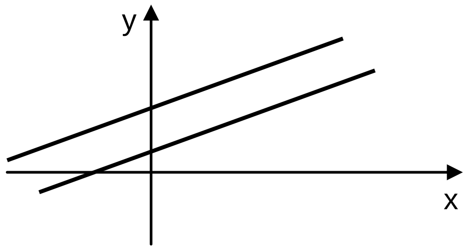
1) El sistema tiene una **única solución**, es decir existe un único par ordenado de números reales que satisface a ambas ecuaciones. Geométricamente las rectas tienen un único punto de intersección. El sistema se denomina COMPATIBLE DETERMINADO.



2) El sistema tiene **infinitas soluciones**, es decir existen infinitos pares ordenados de números reales que satisfacen a ambas ecuaciones. Geométricamente las rectas son coincidentes. El sistema se denomina COMPATIBLE INDETERMINADO.



3) El sistema **NO tiene solución**, es decir no existe un par ordenado de números reales que satisfaga a ambas ecuaciones. Geométricamente las rectas son paralelas. El sistema se denomina INCOMPATIBLE.



Métodos de resolución

Existen diversos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: método gráfico y métodos algebraicos: sustitución, igualación, reducción por sumas y restas, determinantes.

A continuación se desarrollan los procedimientos que se utilizan con mayor frecuencia.

Método gráfico

Este método consiste en graficar las rectas descriptas por las ecuaciones del sistema, la solución es el punto de intersección de ambas en el caso de que el sistema sea compatible, o bien las rectas son coincidentes si el sistema es compatible indeterminado y si el sistema es incompatible las rectas son paralelas. Los gráficos presentados en la página anterior esquematizan las tres situaciones mencionadas.

Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas de una de las dos ecuaciones y reemplazarla en la otra ecuación.

Por ejemplo, sea el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ x + y = 4 & (2) \end{cases}$$

Se despeja **y** en la ecuación (2), es decir,

$$y = 4 - x \quad (3)$$

este valor se reemplaza en la ecuación (1),

$2x + (4 - x) = 1$

Se resuelve la ecuación resultante que posee una incógnita (x), x = -3.

Se reemplaza este valor en la ecuación (3), por lo tanto y = 7.

Método de Igualación:

Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$$

Despejamos una de las dos variables en las dos ecuaciones, con lo cual tenemos un sistema equivalente (en este caso elegimos y):

$$\begin{cases} y = \dfrac{22 - 4x}{3} \\ y = \dfrac{18 - 2x}{5} \end{cases}$$

Recordamos que al tener dos ecuaciones, si los primeros miembros son iguales los segundos también lo son, por lo tanto:

$$\frac{22 - 4x}{3} = \frac{18 - 2x}{5}$$

Luego:

$$\begin{aligned} 5(22 - 4x) &= 3(18 - 2x) \\ 110 - 20x &= 54 - 6x \\ -20x + 6x &= 54 - 110 \\ -14x &= -56 \\ x &= \frac{-56}{-14} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de x obtenido en alguna de las ecuaciones (elegimos la segunda):

$$y = \frac{18 - 2(4)}{5}$$

Operamos para hallar el valor de y:

$$y = \frac{18 - 8}{5}$$

$$y = \frac{10}{5}$$

y=2

Entonces, **x= 4 e y = 2**

Trabajo Práctico N° 3

Funciones de primer grado. Sistemas elementales de ecuaciones lineales

Funciones y ecuaciones de primer grado

1. Dadas las siguientes funciones lineales analice parámetros, grafique.

a) $y = \frac{3}{4}x - 2$

b) $y = -2x - 2$

d)y=-x

c) $y = -\frac{1}{4}x + 6$

f) y = -2

g) 3y + 4x=6

2. Dadas la pendiente y la ordenada al origen, escriba la ecuación de la recta:

a) $a = -2 \quad b = \frac{2}{3}$

b) $a = \frac{1}{3} \quad b = -\frac{5}{2}$

c) a= 0 b= 4

d) a=2 b = 6

3. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales en la variable x:

a) a) $x + 16 = 41$
b) $9x - 45 + 4x - 16 = 4$
c) $2x - 3 + x - 35 = 2 - 9x - 4$
d) $3 \cdot (x - 2) + 9 = 0$
e) $8x + 7 - 2x + 5 = 4x + 12 - (x - 30)$
f) $x + (x + 2) = 36$
g) $2 \cdot (3x - 2) - (x + 3) = 8$
h) $2 \cdot (13 + x) = 41 + x$
i) $2 \cdot (x - 3) - 3 \cdot (4x - 5) = 17 - 8x$
j) $4x - 3 \cdot (1 - 3x) = -3$
k) $4 \cdot (2x) - 3 \cdot (3x - 5) = 12x - 180$
l) $6 - x = 4 \cdot (x - 3) - 7 \cdot (x - 4)$
m) $3 \cdot (2x - 6) - [(x - (3x - 8) + 2) - 1] = 2 - (3 - 2x)$

Sistemas de ecuaciones lineales

4. Resuelva los siguientes sistemas gráfica y analíticamente:

a) $\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -\dfrac{9}{5}x + 12 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3y + 8x - 1 = 0 \\ y = 5 - 2x \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x - 2y + 6 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2y - x = 5 \\ -6y + 3x = -5 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 3x = 2 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5x + 10y = 14 \end{cases}$

Problemas de aplicación

Resolver los siguientes problemas: planteando las ecuaciones y luego usando el método deseado

a) Encuentra dos números cuya suma sea igual a 30, y el doble del primero, más el segundo sea igual al doble de este último.

b) La edad de Carla es el doble que la edad de Macarena. Hace diez años la suma de las edades era igual a la edad que tiene hoy Carla. ¿Cuál es la edad de cada una en la actualidad?

c) Un padre reparte $10.000 entre sus dos hijos. Al mayor le da $2.000 más que al menor. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?

d) Encuentra dos números tales que si a cada uno le agregamos siete unidades, los resultados están en la razón 3 : 2, pero si les restamos cinco unidades, la razón es 5 : 2.

e) Dos estantes contienen en total 40 libros. Al traspasar 5 libros de un estante a otro, resulta que uno queda con el triple del otro. ¿Cuántos libros había originalmente en cada estante?

f) Encuentra las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad.

g) La suma de dos números es 45. Si al primero se le suma 5 y al segundo se le resta 5, se obtienen dos números tales que el primero es el doble que el segundo. ¿Cuáles son los números?

h) Encuentra dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia 6.

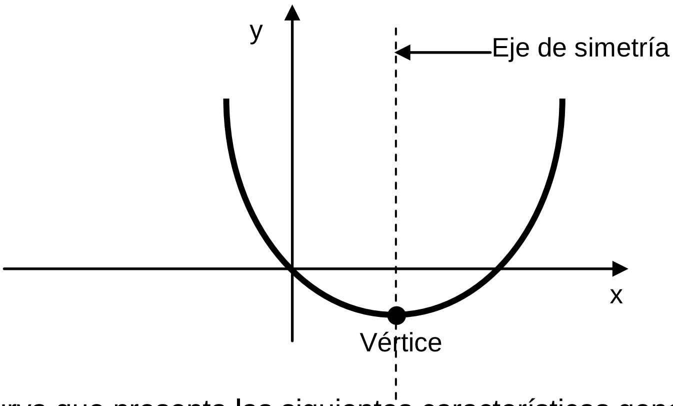
FUNCIONES DE SEGUNDO GRADO

Función de segundo grado

- ✓ La función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \to ax^2 + bx + c$

donde a, b y c son constantes pertenecientes al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y con $a \neq 0$ se llama **función cuadrática** o **función de segundo grado en la variable x**. Puede definirse como un conjunto de pares ordenados de la forma: $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = ax^2 + bx + c;\ a, c \wedge b \in \mathbb{R};\ a \neq 0\}$

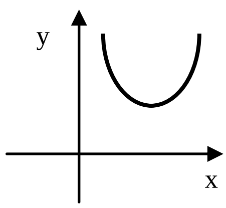
La función **cuadrática** puede representarse gráficamente en el plano real como una **parábola**, la igualdad $y = ax^2 + bx + c$ se denomina ecuación polinómica de la parábola.

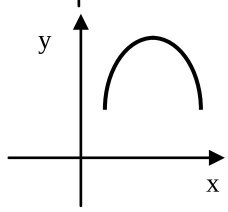


La parábola es una curva que presenta las siguientes características generales:

- ✓ Un eje de simetría paralelo o coincidente con el eje $\overrightarrow{OY}$, de ecuación $x = -\dfrac{b}{2a}$
- ✓ Un punto especial denominado vértice V de coordenadas $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$
- ✓ Si $a > 0$ es una curva cóncava hacia arriba,

el vértice es un mínimo





- ✓ Si $a < 0$ es una curva cóncava hacia abajo,

el vértice es un máximo

Ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita

Sea la función de segundo grado en x definida por: $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, se denomina ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita asociada a esta función a la expresión:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0$$

*Resolver una ecuación cuadrática consiste en encontrar aquel o aquellos números reales (si es que existen), que la verifican. Estos números se denominan **raíces de la ecuación**.*

Geométricamente significa encontrar las primeras componentes de los puntos de la parábola que tienen la segunda componente igual a cero, es decir la intersección de la curva con el eje $\overrightarrow{OX}$.

Las raíces se calculan mediante la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

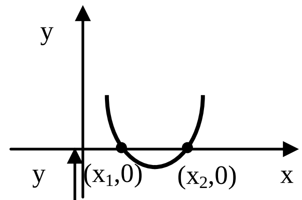
Por ejemplo, sea la ecuación $x^2 + 2x + 4 = 0$, las raíces se calculan aplicando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+2}{2} = -1 \\[2ex] x_2 = \dfrac{-4-2}{2} = -3 \end{cases}$$

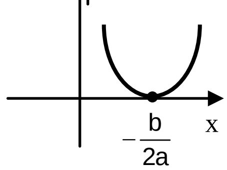
<u>Naturaleza de las raíces</u>

Si las raíces de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se representan por x_1 y x_2 y los coeficientes a, b y c son números reales, es evidente que las raíces **dependen del signo** de la expresión $(b^2 - 4\,a.c)$. Esta expresión se denomina **discriminante**. De modo que si:

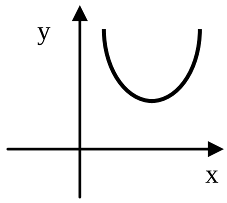
✓ $(b^2 - 4\,a.c) > 0$ las raíces son reales y distintas. La parábola intersecta al eje x en los puntos $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$.



✓ $(b^2 - 4\,a.c) = 0$ las raíces son reales e iguales, es decir una raíz doble. La parábola toca al eje x en un punto $\left(-\dfrac{b}{2a}, 0\right)$



✓ $(b^2 - 4\,a.c) < 0$ las raíces no son números reales (son números complejos). La parábola no interfecta al eje x .



Trabajo Práctico Nº 4

Funciones y ecuaciones de segundo grado

1. Dadas las siguientes funciones cuadráticas determine vértice, eje de simetría, dominio, conjunto imagen, intersección con los ejes y grafique en ejes coordenados cartesianos.

a) $y = x^2 – x - 2$

b) $y = x^2 – 6x + 5$

c) $y = x^2 + 3x + 1$

d) $y = x^2$

e) $y = - 4x^2 +32 x -64$

f) $y = - x^2 + x + 6$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando la fórmula:

a) $x^2 – 3x + 2 = 0$

b) $x^2 +x - 12 = 0$

c) $6x^2 – 6x - 6 = 0$

d) $2x^2 – 4x - 3 = 0$

3. Determine, en las siguientes ecuaciones, la naturaleza de las raíces y calcúlelas en el caso de ser posible:

a) $x^2 + 6x + 1 = 0$

b) $-3x^2 + 6x - 3 = 0$

c) $2x^2 - 6 = 0$

d) $2 x^2 - 8x = 0$

UNIDAD 3

POLINOMIOS

POLINOMIOS

Antes de desarrollar la teoría de polinomios, es necesario definir los siguientes conceptos:

Expresión algebraica racional: es toda combinación de números y variables (que se denotan con letras), en ella las variables están afectadas por las siguientes operaciones: suma, resta, multiplicación, división y potenciación. Por ejemplo: $3\,x^2 + 2\,x+3$.

Las expresiones algebraicas racionales se clasifican en: expresiones algebraicas racionales enteras y fraccionarias.

Expresión algebraica racional entera: son expresiones en las que las variables están vinculadas por las operaciones de suma, resta y multiplicación. Las potencias son con exponentes naturales. Por ejemplo: $x^3 + 4\,x\,y - \sqrt[3]{3}\,y^4 + \frac{1}{8}b^5$ es una expresión algebraica racional entera puesto que las operaciones de radicación y división afectan a los coeficientes y no a las variables.

Expresión algebraica racional fraccionaria: son expresiones en las que alguna de las variables forma parte de un divisor o presenta exponente negativo. Por ejemplo: $4x^3 + 6\,x^{-2}\,y + \frac{1}{3}b^4$

Expresión algebraica irracional: son expresiones en las que alguna de las variables está afectada por radicales o exponente fraccionario. Por ejemplo: $x^3 + \sqrt[3]{y} + x^{\frac{2}{3}}$.

POLINOMIOS

Polinomio es toda expresión algebraica racional entera. Se puede decir que se llama forma polinómica de grado **n** o polinomio formal de grado **n** en una indeterminada x en el conjunto de los números reales (R) a toda expresión de la forma:

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \cdots + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_n\,x^n$$

siendo $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n \in R$; $a_n \neq 0$ y $n \in N$.

El *grado* de un polinomio es el mayor exponente de la indeterminada o variable cuyo coeficiente es distinto de cero.

Los números reales $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$ se denominan coeficientes de x. Un polinomio en una indeterminada x se simboliza con letras mayúsculas por ejemplo, P(x) que se lee “P de x”.

a_0 se llama término independiente y a_n coeficiente principal o director.

Si el polinomio tiene un solo término se denomina *monomio*, si tiene dos términos se denomina *binomio*, con tres es un *trinomio*, con cuatro es un *cuatrinomio*.

Polinomios especiales

Polinomio **nulo**: es aquel que tiene todos sus coeficientes iguales a cero. P(x)=0.

Polinomio **mónico**: es aquel que tiene su coeficiente principal igual a 1. Por ejemplo:

$P(x)=3 + 4x^2 + x^6$ es un polinomio mónico de grado 6.

Polinomio **ordenado**: un polinomio está ordenado si todos los términos que lo componen están ordenados de manera creciente o decreciente según los exponentes de la variable o indeterminada.

En forma creciente: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$

En forma decreciente: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Polinomio **incompleto**: es un polinomio al que le faltan algunos términos, para completarlo se agregan los términos faltantes con coeficiente cero. Por ejemplo:

$P(x)=3 + 4x^2 + 5 x^6$ es un polinomio incompleto, para completarlo se agregan términos:

$P(x)=3 + 0x + 4x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + 5 x^6$, este polinomio está completo y ordenado en forma creciente.

Función polinómica

- ✓ La función P: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to P(x)= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

se denomina función polinomial o polinómica. También puede definirse como:

$$P= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \ y= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \}$$

Esta función asigna valores a la variable x en el conjunto $\mathbb{R}$, es decir hace corresponder a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ un valor $P(x) \in \mathbb{R}$, llamado **valor de la función polinomial** en x. Por ejemplo, sea la función polinómica tal que:

$$P(x)= 2x^2 + x+ 4$$

Si x = 2, resulta:

$$P(2)= 2(2)^2 + 2+ 4=14$$

Se dice entonces que 14 es el valor del polinomio para x = 2.

Casos particulares

- ✓ **Función constante**, definida por f(x)= k ó y = k, es una función polinómica de grado cero.
- ✓ **Función de primer grado**, definida por $f(x)= a_1 x + a_0$, es una función polinómica de grado uno.
- ✓ **Función de segundo grado o cuadrática**, definida por $f(x)= a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, es una función polinómica de segundo grado.

Ceros de una función polinomial, raíces de un polinomio

Se dice que **a** es un cero de una función polinómica P(x) si P(a) = 0.

Se dice que **a** es una raíz de la ecuación polinómica P(x) = 0 si al reemplazar x por a el primer miembro de la ecuación es igual a 0.

Por ejemplo, dada la función: P(X) =2 x + 1, el valor de x que la anula es $-\frac{1}{2}$, este es el cero de la función. Si consideramos el mismo polinomio pero expresado como una ecuación:

$$2x + 1 = 0,$$

despejando x se tiene: $x = -\frac{1}{2}$, esta es la raíz de la ecuación.

Operaciones con polinomios

1. Adición

La suma de dos polinomios es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen sumando los coeficientes de los términos de igual grado. El grado del polinomio resultante es igual al mayor grado de los polinomios sumandos.

En símbolos, sean:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\text{y } Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

La suma es:

$$P(x) + Q(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + \\ + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) =$$

$$= (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

Por ejemplo, sean $P(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4$ y $Q(x) = 3x^3 + x^2 + 2x$, su suma es:

$$P(x) + Q(x) = (2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4) + (3x^3 + x^2 + 2x) = (2+3)\,x^3 + \left(\frac{1}{2} + 1\right) x^2 + 2x + 4 =$$

$$= 5\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2 + 2x + 4$$

2. Sustracción

La sustracción de dos polinomios es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen sumando a P(x) el opuesto de Q(x).

En símbolos, sean:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\text{y } Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

La resta es:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)] = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + \\ + (-b_n x^n - b_{n-1} x^{n-1} - \cdots - b_3 x^3 - b_2 x^2 - b_1 x - b_0) =$$

$$= (a_n - b_n) x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (a_3 - b_3) x^3 + (a_2 - b_2) x^2 + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0)$$

Por ejemplo, sean P(x)= $2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4$ y Q(x)= $3x^3 + x^2 + 2x$, su diferencia es:

$$P(x) - Q(x) = (2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4) + (-3x^3 - x^2 - 2x) = (2-3)\,x^3 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) x^2 + 2x + 4 =$$

$$= -x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$$

3. Multiplicación

La multiplicación de dos polinomios consiste en multiplicar cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio y luego se suman los coeficientes de términos de igual grado.

En símbolos, sean:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$\text{y } Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$$

El producto es:

$$P(x).Q(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0).(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0) =$$

$$= (a_n . b_m) x^{n+m} + (a_{n-1} . b_{n-1}) x^{n+m-1} + \cdots + (a_0 . b_0)$$

Por ejemplo, sean P(x)= $(2x^2 - 3x + 1)$ y Q(x)= $(2x - 3)$, su diferencia es:

$$P(x) . Q(x) = (2x^2 - 3x + 1) + (2x - 3) = (2x^2 - 3x + 1).\, 2x + (2x^2 - 3x + 1)(-3) =$$

$$= 4x^3 – 6x^2 + 2x - 6x^2 + 9x - 3 =$$

$$= 4x^3 – 12x^2 + 11x – 3$$

En forma práctica:

$$\begin{array}{r} P(x) = 2x^2 - 3x + 1 \\ .\ Q(x) = \qquad 2x - 3 \\ \hline -6x^2 + 9x - 3 \\ 4x^3 - 6x^2 + 2x \qquad \\ \hline = 4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 \end{array}$$

Productos especiales

Cuadrado de un binomio

Sea $(x + a)^2$

$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = (x + a)\,x + (x + a)\,a = x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$$\mathbf{(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2}$$

Por ejemplo, $(x + 4)^2 = x^2 + 2.4x + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

Además,

$$\mathbf{(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2}$$

4. División

Para realizar la división de dos polinomios, el polinomio dividendo debe tener grado mayor o igual que el del polinomio divisor, ambos deben estar ordenados en forma decreciente y el polinomio dividendo debe estar completo.

Dados P(x) de grado n y Q(x) de grado m, tal que $n \geq m$, existe C(x) de grado (n-m) y R(x) tales que:

$$P(x)/Q(x) = C(x) \Leftrightarrow P(x) = C(x).Q(x) + R(x)$$

Donde C(x) es el cociente y R(x) es el resto. Si el resto es igual a cero, la división es exacta.

Por ejemplo, se quiere dividir P(x)= $4x^3 - 3x + 1$ entre Q(x)= $x^2 - x$,

$$
\begin{array}{r|l}
4x^3 + 0x^2 - 3x + 1 & x^2 - x \\ \cline{2-2}
-4x^3 + 4x^2 & = \underbrace{4x + 4}_{C(x)} \\ \cline{1-1}
4x^2 - 3x & \\
-4x^2 + 4x & \\ \cline{1-1}
\underbrace{x + 1}_{R(x)} &
\end{array}
$$

Trabajo Práctico N° 5

Polinomios

1. Indique para cada polinomio su grado, su coeficiente principal, complételo si es necesario y determine el valor de P(2) y P(-1)

a) $P(x)=x^3-3x^2+x-5$ b) $P(u)=\sqrt{5}-u^3$ c) $P(t)=8$

d) $P(z)=-z^4-3z^2+5$ e) $P(t)=0$ f) $P(x)=3x^{12}-x^4-5x^2+3$

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones no son polinómicas? Justifique su respuesta.

a) $f(x)=\frac{1}{4}x^4$

b) $f(x)=5x^2+2+\log x$

c) $f(x)=4+\frac{1}{x^3}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{30}\,x^2+x^3+8$

g) $f(x)=-8+x^4+3\sqrt{x}$

h) $f(x)=4$

3. Encuentre el valor de α en los polinomios para que se cumplan las condiciones indicadas:

 a) $P(x)=x^3-3x^2+\alpha x-5$ si $P(2)=7$

 b) $P(z)=-z^4-\alpha z^2+5$ si $P(1)=4$

4. Realice las siguientes operaciones:

a) $(2x^3-9x^2-4+5x)+(6x^4+x^2-5x)$

b) $(x^4-9x^2+1)+(10x^3+23x^2+12x)$

c) $(-3x^4+5x-2x^3-3)-(27x^3+36x-54x^2+8)$

d) $(5x^3+2x-4x^2-3)-(5x^2+14-6x)$

e) $(-4x^4+3x^2-1+x)-(2-5x^3-4x^2)$

5. Dados los polinomios:

$A(x)=3x-2$

$B(x)=x^2-2x+3$

$C(x)=2x^3+5x^2-4x-1$

Encuentre:

i) [A(x)] [B(x)]

ii) [A(x)] [C(x)]

iii) [A(x)] [B(x) + C(x)]

v) [A(x)] [B(x) - C(x)]

6. Dados los polinomios:

$A(x)=4x^5-3x^4+2x^3-5x+1$

$B(x)=x^2-x+1$

$C(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

Determine:

i) [A(x)] / [B(x)]

ii) [A(x)] / [C(x)]

iv) [C(x)] / [B(x)]

v) [A(x)] / [B(x) - C(x)]

7. Calcule:

a) $(4 + x)^2$

b) $(x + 3)^2 =$

c) $(5 + a)^2 =$

d) $(6x + y)^2 =$

d) $(9 + 4x)^2 =$

e) $(7x + 11)^2 =$

f) $(a + b)^2 =$

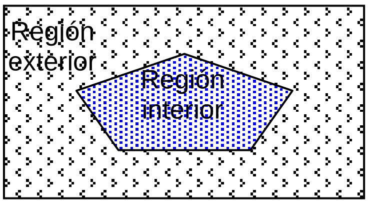
g) $(1 + 3x^2)^2 =$

UNIDAD 4

FIGURAS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS

Figuras y Polígonos

Si se considera un multilátero simple cerrado, este divide al plano en dos regiones: una interior y otra exterior. Una **figura geométrica** puede definirse como el conjunto de puntos que constituyen a ese multilátero (es la frontera o elemento de separación).

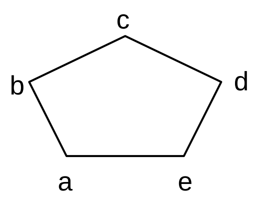


Se define a un **polígono** (*poli*: muchos y *gonos:* ángulos) como el conjunto de puntos de una poligonal cerrada y todos los puntos interiores a ella.

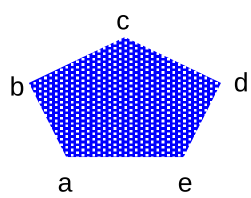
En el esquema que sigue se puede observar a abcde como un multilátero simple cerrado (es una figura).

La región interior se denomina **polígono abierto**.

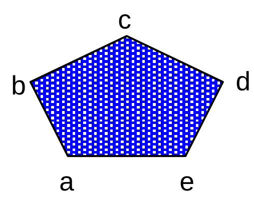
La unión del polígono abierto y el multilátero se denomina **polígono cerrado abcde.**



Multilátero abcde



Polígono abierto abcde



Polígono cerrado abcde

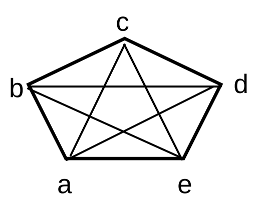
Elementos de un polígono

Las características de un polígono dependen de la posición de los puntos a, b, c, d, e que se denominan **vértices**.

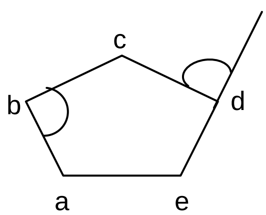
Los segmentos determinados por pares de vértices consecutivos se denominan **lados** del polígono.

Son lados del polígono abcde: $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}$ y $\overline{ea}$

Los segmentos determinados por pares de vértices no consecutivos se denominan **diagonales**.



Son diagonales del polígono abcde: $\overline{ac}, \overline{ad}, \overline{bd}, \overline{be}, \overline{ce},$



Angulo interior: ángulo formado por dos lados consecutivos considerando sean también puntos interiores del polígono.

Angulo exterior: esta formado por uno de los lados de la poligonal y la prolongación del consecutivo.

Clasificación de los polígonos según el número de lados

Los polígonos reciben nombres particulares de acuerdo con el número de lados que presenten:

Número de lados	Nombre	Número de lados	Nombre
3	Triángulo	9	Eneágono
4	Cuadrángulo	10	Decágono
5	Pentágono	11	Undecágono
6	Exágono	12	Dodecágono
7	Eptágono	15	Pentadecágono
8	Octógono	20	icoságono

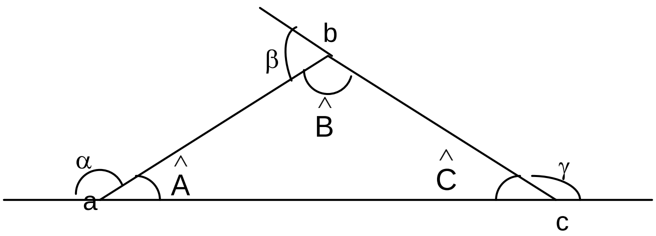
Polígonos regulares

Si un polígono tiene sus lados y sus ángulos congruentes se denomina **polígono regular.** Como ejemplos se verán triángulos y cuadriláteros.

Triángulos

Los triángulos son polígonos de tres lados.

Los elementos de un triángulo son los siguientes:

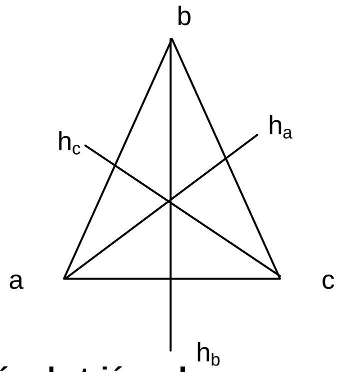


Vértices: a, b, c

Lados: $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$

Angulos interiores: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

Angulos exteriores: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$



La **altura** h es un elemento secundario importante e útil para la resolución de una serie de situaciones problemáticas.

Clasificación de triángulos

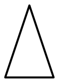
Los triángulos se clasifican: según sus lados y según sus ángulos.

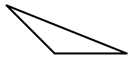
Según sus ángulos:

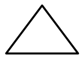
- Acutángulo: tiene sus tres ángulos congruentes.

- Rectángulo: tiene un ángulo recto
- Obtusángulo: tiene un ángulo obtuso.

Según sus lados:

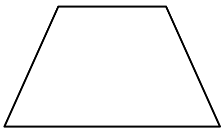
- Isósceles: tiene por lo menos dos lados congruentes 

- Escaleno: no tiene lados congruentes. 

- Equilátero: tiene los tres lados congruentes 

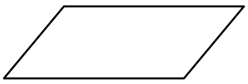
Cuadriláteros

Los cuadriláteros son multiláteros de 4 lados, de acuerdo con sus características se distinguen los siguientes cuadriláteros especiales:



Trapecio: es todo cuadrilátero que tiene por lo menos un par de lados paralelos

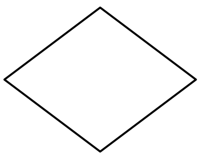
Los lados paralelos se denominan **bases.**



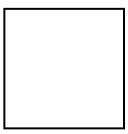
Paralelogramo: es un trapecio con los dos pares de lados paralelos.

Rectángulo: es todo cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos.

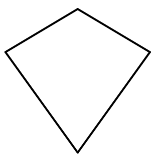
El rectángulo es también paralelogramo y trapecio rectángulo isósceles.



Rombo: es todo cuadrilátero que tiene sus lados congruentes.



Cuadrado: es todo cuadrilátero que tiene sus lados y sus ángulos congruentes.



Romboide: es todo cuadrilátero que tiene dos pares de lados consecutivos congruentes.

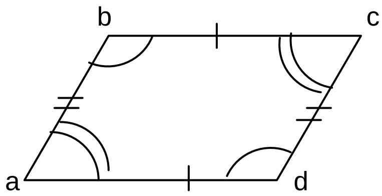
Propiedades de los lados y de los ángulos

Trapecio

Tiene un par de lados paralelos

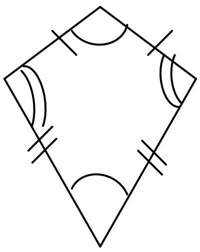
Trapecio rectángulo: tiene además un par de ángulos rectos.

Trapecio isósceles: además los lados distintos de las bases son congruentes y los ángulos adyacentes a cada base son congruentes.



Paralelogramo

Cumple la propiedad de los trapecios y además por definición en todo paralelogramo los lados opuestos son paralelos. Además, en todo paralelogramo los lados opuestos son congruentes y los ángulos opuestos son congruentes.

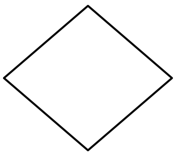


Romboide

Todo romboide tiene dos pares de lados consecutivos congruentes y un par de ángulos opuestos congruentes.

Rectángulo

Todo rectángulo además de las propiedades enunciadas para trapecios y paralelogramos tiene sus ángulos congruentes y son rectos.



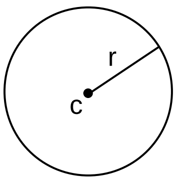
Rombo

Un rombo es un paralelogramo y un romboide por lo tanto cumple contadas las propiedades de estos cuadriláteros y además tiene sus lados congruentes.

El **cuadrado** cumple con todas las propiedades de los lados y ángulos enunciadas para las distintas clases de cuadriláteros.

Circunferencia

La circunferencia de centro c y radio r se define como el conjunto de puntos del plano cuya distancia c es igual a r.



Perímetros y Áreas de polígonos

Perímetros

Perímetro de un polígono

Se llama perímetro de un polígono a la suma de los lados del mismo.

Por ejemplo, el perímetro del polígono abcde es:

$$\text{Per. abcde}= \overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}+\overline{ea}$$

Perímetro de un polígono regular

En un polígono regular, todos los lados son iguales, por lo tanto el perímetro es igual al producto de la longitud de uno de los lados (L) por el número de lados (n).

Per. Polígono regular = n . L

Perímetro de una circunferencia de radio r y diámetro D es:

$$\text{Per. Circunferencia}= 2\pi.r= \pi.\ D$$

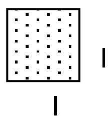
Áreas

- ✓ **Área del rectángulo**: es el producto de la longitud de su base b por la longitud de su altura h.

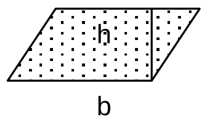
Area rectángulo= b . h

- ✓ **Área del cuadrado**: como la base es igual a la altura

Area cuadrado= $\mathbf{l^2}$

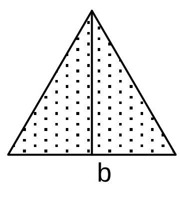


- ✓ **Área del paralelogramo:** como un paralelogramo es equivalente a un rectángulo que tenga base y altura congruentes



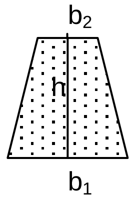
Area paralelogramo = b . h

- ✓ **Área del triángulo**: como un triángulo es equivalente a un paralelogramo que tiene la misma altura h y cuya base sea igual a la mitad de la base de un triángulo.



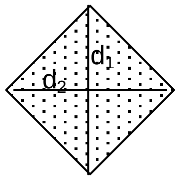
Area triángulo = $\frac{1}{2}b.h$

- ✓ **Área del trapecio**: como un trapecio es equivalente a un triángulo que tiene la misma altura h y cuya base sea igual a la suma de la bases del trapecio.



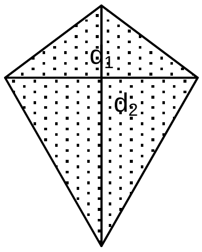
Area trapecio = $\frac{1}{2}(b_1 + b_2).h$

- ✓ **Área del rombo: se consideran las diagonales d1 y d2**.



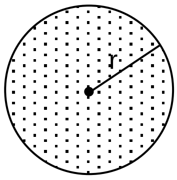
Area rombo = $\frac{1}{2}(d_1.d_2)$

- ✓ **Área del romboide**: se consideran las diagonales d_1 y d_2.



Area romboide = $\frac{1}{2}(d_1.d_2)$

- ✓ **Área del círculo**: considerando radio r

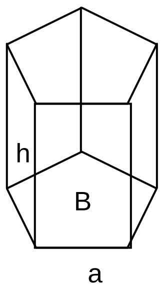


Area círculo = πr^2

Cuerpos geométricos

Las áreas (A) y volúmenes (V) de los mas utilizados cuerpos geométricos se detallan a continuación.

Prisma
Cuerpo geométrico cuyas bases son dos polígonos iguales y paralelos y sus caras laterales son paralelogramos.



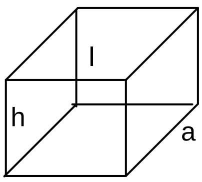
Superficie = Área lateral + área de las bases superior e inferior
Si se llama B al área de la base, y el área lateral de cada una de las 5 caras es A_L = a.h, entonces:

$$A_{prisma} = 5\ A_L + 2B$$

Volumen= Superficie de la base . altura

$$V_{prisma} = B.h$$

Ortoedro
Prisma cuyas bases son dos rectángulos.



Si l es el largo, a es el ancho y h la altura, entonces

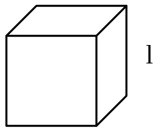
$$A_{ortoedro} = 2(ah + al + hl)$$

Volumen= Superficie de la base . altura

$$V_{prisma} = a\ .\ l.\ h$$

Cubo

Ortoedro en el que las tres dimensiones son iguales.

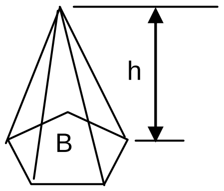


$A_{cubo} = 6\, l^2$

$V_{cubo} = l^3$

Pirámide

Cuerpo geométrico cuya base es un polígono cualquiera y sus caras laterales triangulos.



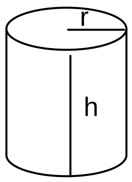
Si se llama B al área del polígono de n lados que constituye la base, y el área lateral de cada uno de los triángulos que forman sus n caras es A_L, entonces:

$A_{pirámide} = B + n\, A_L$

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} Bh$

Cilindro

Es el cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un rectángulo alrededor de uno de sus lados



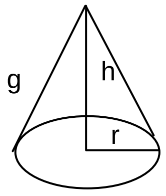
La superficie de la base B= πr^2 y el área lateral es $A_L = 2\pi r\, h$, entonces:

$A_{cilindro} = B + A_L = \pi r^2 + 2\pi r\, h$

$V_{cilindro} = \pi r^2\, h$

Cono

Es el cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus lados.



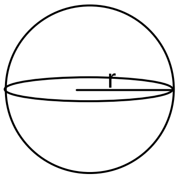
Siendo r el radio de la base, h la altura y g generatriz del cono

$A_{cono} = \pi r(g+r)$; $g = \sqrt{h^2 + r^2}$

$V_{cono} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Esfera

Cuerpo geométrico engendrado por la revolución completa de un semicírculo alrededor de su diámetro.



Siendo r el radio

$A_{esfera} = 4\pi r^2$

$V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi r^3$

Trabajo Práctico N° 8
Figuras y Cuerpos geométricos

1. Calcule la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 12cm.

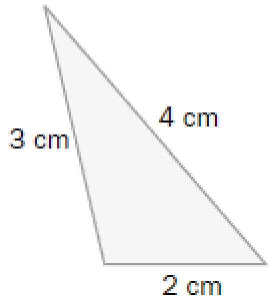
Longitudes y áreas

Perímetros

1- Calcula el perímetro de las siguientes figuras.

a)

b)



2- Halla el perímetro de estas figuras.

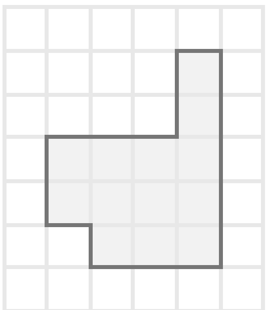
a) Un cuadrado de 6 centímetros de lado.

b) Un triángulo isósceles cuya base mide 5 centímetros, y cuyos lados iguales miden 8 centímetros.

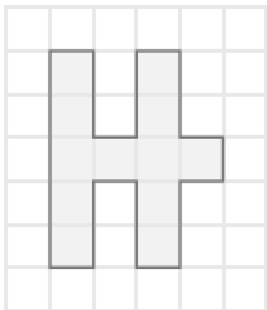
c) Un hexágono regular cuyo lado mide 7 centímetros.

3. Calcula el área de estas figuras, tomando como medida el cuadrado de la cuadrícula.

a)



b)



4. Halla el perímetro de las siguientes figuras.

a) Un dodecágono regular de 10 centímetros de lado.

b) Un rombo de 7 metros de lado.

c) Un romboide cuyos lados iguales miden 6 y 8 centímetros, respectivamente.

5. El perímetro de un cuadrado mide 36 centímetros. ¿Cuánto mide el lado?

6. El perímetro de un triángulo isósceles es de 54 decímetros. Si el lado desigual mide 20

decímetros, ¿cuánto miden los lados iguales?

Teorema de Pitágoras

7. Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 centímetros, respectivamente.

8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 centímetros, y un cateto, 8. ¿Cuántomide el otro?

9. Calcula la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 1 y 5 centímetros, respectivamente.

10. Halla la medida de la altura de estos triángulos.

a) Equilátero, cuyo lado mide 10 centímetros.

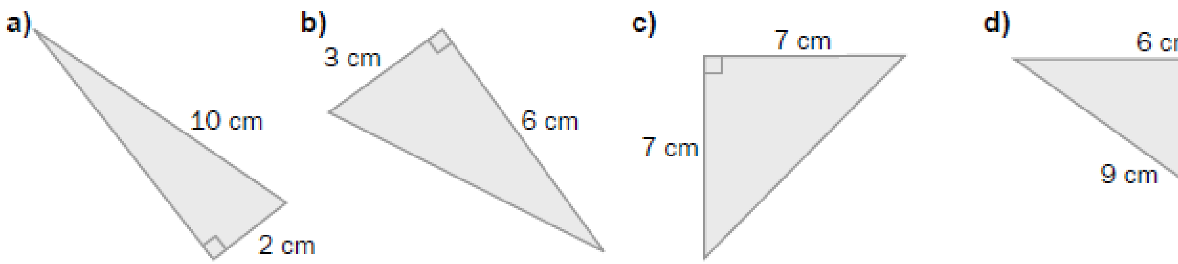
b) Isósceles, con la base de 4 centímetros, y lados iguales de 3 centímetros.

11. ¿Es posible que en un triángulo rectángulo la hipotenusa mida 2 centímetros, y cada cateto, 1 centímetro?

12. Los siguientes datos, en centímetros, corresponden a las medidas de los lados de dos triángulos. ¿Son triángulos rectángulos?

a) 15, 20 y 25 b) 3, 6 y 8

13. Halla el lado que falta en cada uno de los siguientes triángulos.



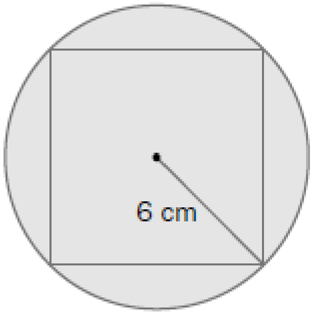
14. Halla la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 21 y 28 centímetros.

15. Calcula la altura de un triángulo equilátero cuyo lado, en centímetros, mide 26.

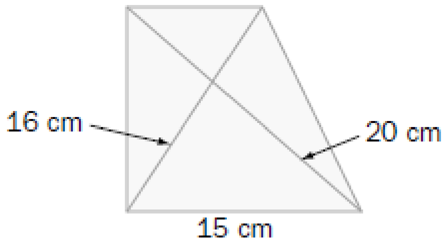
16. Determina la altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles sabiendo que los lados iguales miden 5 centímetros, y el lado desigual, 60 milímetros.

17. Halla el perímetro de un rombo sabiendo que sus diagonales miden 6 y 8 centímetros, respectivamente.

18. Con los datos de la figura, calcula el lado del cuadrado.

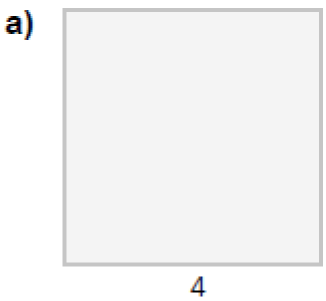


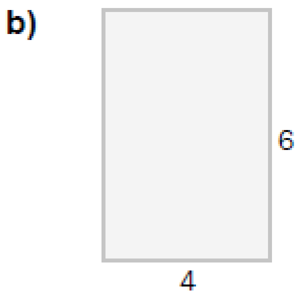
19. Averigua la medida de los lados de esta figura.



Áreas de figuras planas

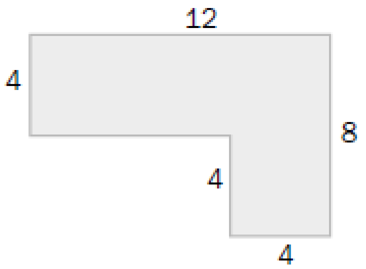
20. Calcula el área de estas figuras en las que las medidas vienen dadas en centímetros.





21. Halla el área de un rectángulo cuya base mide 15 centímetros, y su diagonal, 17.

22. Halla el área de la figura descomponiéndola antes en rectángulos y cuadrados.



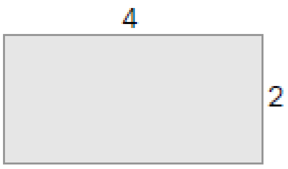
23. Halla el área de un paralelogramo de 6 centímetros de base y 25 milímetros de altura.

24. Calcula el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 7 centímetros, respectivamente.

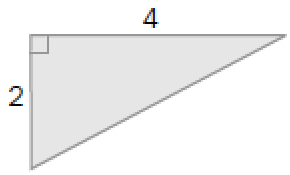
25. Halla el área de un rombo cuyas diagonales miden 6 decímetros y 100 centímetros, respectivamente.

26. Calcula el área de las siguientes figuras, cuyas longitudes vienen dadas en centímetros.

a)



b)



27. Halla el área de estas figuras.

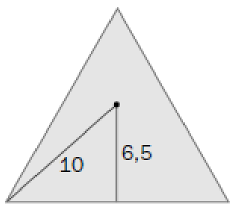
a) Un cuadrado de 6 decímetros de lado.

b) Un romboide de 5 centímetros de base y 3 centímetros de altura.

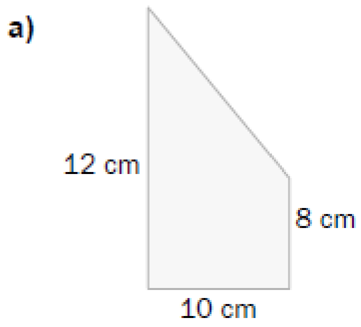
28. Fíjate en el siguiente triángulo equilátero.

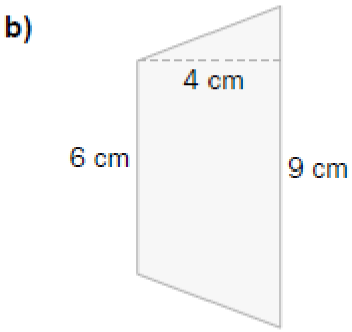
a) Halla el lado del triángulo.

b) Calcula el área del triángulo.

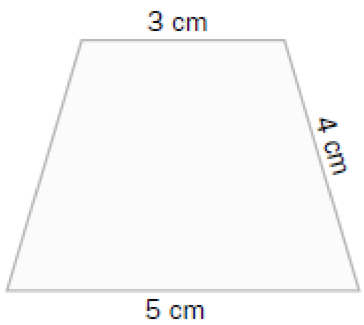


29. Calcula el área de estos trapecios.





30. Halla el área del siguiente trapecio.

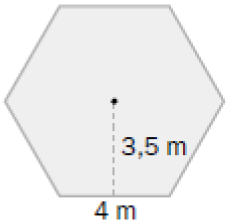


31. Halla el área de un decágono regular de 5 centímetros de lado y 7,69 centímetros de apotema.

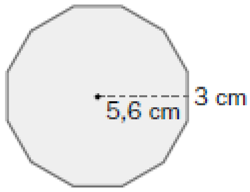
32. ¿Cuál es el área de un pentágono regular de 8 centímetros de lado y 6,81 centímetros de radio?

33. Halla el área de estos polígonos regulares.

a)

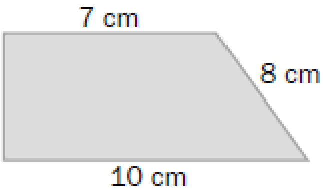


b)

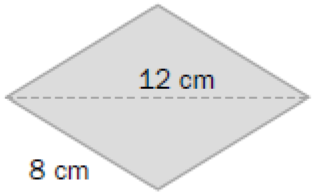


34. Determina el área de los siguientes paralelogramos.

a)



b)



1.-Calcula el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que tiene 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2500 mm de alto.

2.-Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1.5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de 6 € el metro cuadrado.

a) Cuánto costará pintarla.

b) Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla.

3.- En un almacén de dimensiones 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas de dimensiones 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¿Cuantas cajas podremos almacenar?

4.- Determina el área total de un tetraedro, un octaedro y un icosaedro de 5 cm de arista.

5.- Calcula la altura de un prisma que tiene como área de la base 12 dm^2 y 48 l de capacidad.

6.- Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.

7.- Un cilindro tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base. Y la altura mide 125.66 cm. Calcular:

a) El área total.

b) El volumen

8.- En una probeta de 6 cm de radio se echan cuatro cubitos de hielo de 4 cm de arista. ¿A qué altura llegará el agua cuando se derritan?

9.- La cúpula de una catedral tiene forma semiesférica, de radio 50 m. Si restaurarla tiene un coste de 300 € el m^2, ¿A cuánto ascenderá el presupuesto de la restauración?

10.- ¿Cuántas losetas cuadradas de 20 cm de lado se necesitan para recubrir las caras de una piscina de 10 m de largo por 6 m de ancho y de 3 m de profundidad?

11.- Un recipiente cilíndrico de 5 cm de radio y y 10 cm de altura se llena de agua. Si la masa del recipiente lleno es de 2 kg, ¿cuál es la masa del recipiente vacío?

12.- Para una fiesta, Luís ha hecho 10 gorros de forma cónica con cartón. ¿Cuánto cartón habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de generatriz?

13.- Un cubo de 20 cm de arista está lleno de agua. ¿Cabría esta agua en una esfera de 20 cm de radio?

Bibliografía

- Tapia, N. 1989. Matemática 1.Editorial Estrada. Buenos Aires.
- Tapia, N. 1989. Matemática 2.Editorial Estrada. Buenos Aires.
- Tapia, N. 1989. Matemática 3.Editorial Estrada. Buenos Aires.
- Tapia, N. 1989. Matemática 4.Editorial Estrada. Buenos Aires.
- Avila, M.; Rafael, B. 2005. Cuadernillo de Matemáticas para el Ingreso 2005. Facultad de Agronomía y Agroindustrias. UNSE