UNIVERSIDAD NACIONAL DE SGO. DEL ESTERO

Programa “Ingreso Universitario - Modalidad Mayores de 25 años sin título secundario”

MÓDULO DE MATEMÁTICAS

Profesora Corvalán Valeria

Ingreso 2025

UNIDAD 1

CONJUNTOS NUMÉRICOS

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Números Naturales (N)

Los primeros números utilizados por los seres humanos fueron los números naturales: 1, 2, 3, 4, ... El conjunto de Números Naturales se denota con $\mathbb{N}$:

$$N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

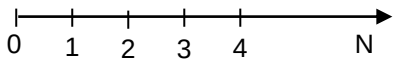
Si se incluye el cero se escribe N_0:

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

El conjunto de NUMEROS NATURALES posee las siguientes propiedades:

- Es un conjunto ordenado según la relación de menor
- Tiene primer elemento
- Es un conjunto infinito (no tiene último elemento)
- No es denso, es discreto porque entre dos elementos cualesquiera existe un número finito de números naturales

Este conjunto se puede representar en una recta numérica:



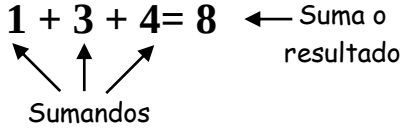
En la recta puede verse el orden de estos números, por ejemplo:

- 0 es menor que 2, en símbolos: $0 < 2$
- 4 es mayor que 3, $4 > 3$

En general, el número α es mayor que β ($\alpha > \beta$), si α se encuentra a la izquierda de β.

Operaciones en el conjunto de Números Naturales

1. ADICION o SUMA



Propiedades de la adición o suma:

1.- La suma cumple la ley de clausura, es decir, la suma de números naturales tiene como resultado otro número natural.

$$\forall \alpha, \beta \in N : \alpha + \beta \in N$$

2.- La suma es asociativa, es decir, que el resultado no varía si se realizan sumas parciales

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

3.- La suma es conmutativa, es decir, el orden de los sumandos no altera la suma

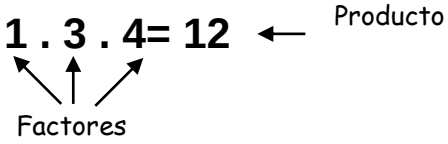
$$\forall \alpha, \beta \in N : (\alpha + \beta) = (\beta + \alpha)$$

4.- Existencia de elemento neutro: el cero es el elemento neutro para la suma

$$\forall \alpha \in N : (\alpha + 0) = (0 + \alpha) = \alpha$$

2. MULTIPLICACIÓN

Los términos de una multiplicación se llaman FACTORES, el resultado de la multiplicación se denomina PRODUCTO.



Propiedades del producto:

1.- El producto es una ley de composición interna, es decir, el producto de números naturales tiene como resultado otro número natural.

$$\forall \alpha, \beta \in N : \alpha \,.\, \beta \in N$$

2.- El producto es asociativo, es decir, que el resultado no varía si se realizan productos parciales

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : \alpha \,(\beta \,.\, \gamma) = (\alpha \,.\, \beta)\, \gamma$$

3.- El producto es conmutativo, es decir, el orden de los factores no altera el producto

$$\forall \alpha, \beta \in N : (\alpha \,.\, \beta) = (\beta \,.\, \alpha)$$

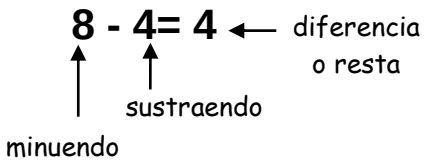
4.- Existencia de elemento neutro: el uno es el elemento neutro para el producto

$$\forall \alpha \in N : (\alpha \,.\, 1) = (1 .\, \alpha) = \alpha$$

5.- La multiplicación es distributiva con respecto a la suma.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : \alpha \,(\beta + \gamma) = (\alpha \,.\, \beta) + (\alpha \,.\, \gamma)$$

3. RESTA O DIFERENCIA



La sustracción o resta de dos números naturales existe si y sólo si el minuendo es mayor que el sustraendo.

Propiedades de la resta o diferencia:

1.- La resta no es asociativa, es decir, que el resultado varía de acuerdo a como se asocien los términos. Por ejemplo:

$$10 - (4 - 1) = 7 \text{ no es igual a } (10 - 4) - 1 = 5$$

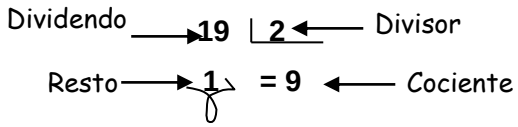
2.- La resta no es conmutativa. Por ejemplo:

6 - 4 está definida en el conjunto de los naturales pero 4 – 6 no está definida en N

3.- La multiplicación es distributiva con respecto a la diferencia.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : \alpha\,(\beta - \gamma) = (\alpha \,.\, \beta) - (\alpha \,.\, \gamma)$$

4. DIVISION O COCIENTE

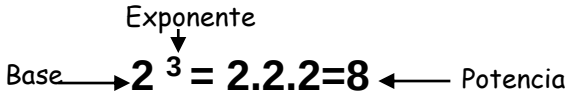


En la división se verifica que:

DIVIDENDO = DIVISOR . COCIENTE + RESTO

Para que la división sea exacta el dividendo debe ser múltiplo del divisor.

5. POTENCIACION



La potenciación es un caso particular de producto: todos los factores son iguales

En general, la n-ésima potencia puede expresarse simbólicamente como:

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \,.\, \alpha \,.\, \alpha \,.... \,\alpha}_{\text{n veces}}$$

La base es el número que se multiplica y el exponente indica las veces que se multiplica la base

α^n se lee alfa elevado a la ene

4^3 se lee cuatro a la tercera potencia o cuatro al cubo

Propiedades de la potenciación:

1.- La potenciación **no es conmutativa**, por ejemplo:

$$5^2 \text{ no es igual a } 2^5$$

2.- La potenciación **no es distributiva con respecto a la suma y a la diferencia**, por ejemplo:

$$(2 + 3)^2 = 25 \text{ es distinto a } 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

3.- La potenciación **es distributiva con respecto al producto y al cociente**

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : (\alpha \,.\, \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} \,.\, \beta^{\gamma}$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : (\alpha : \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} / \beta^{\gamma}$$

4.- **Producto de potencias de igual base**: el producto de potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes de las potencias dadas.

En símbolos:

$$\alpha^{n} \,.\, \alpha^{m} = \alpha^{m+n}$$

$$6^3 \,.\, 6^2 = 6^{3+2} = 6^5$$

5. **Cociente de potencias de igual base**: el cociente de potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es igual a la diferencia entre los exponentes de las potencias dadas

En símbolos:

$$\alpha^{n} : \alpha^{m} = \alpha^{m-n}$$

$$3^{4} : 3^{2} = 3^{4-2} = 3^{2}$$

6. **Potencias de potencia**: la potencia de otra potencia es una potencia de la misma base cuyo exponente es igual al producto de los exponentes dados

$$(\alpha^{n})^{m} = \alpha^{n \,.\, m}$$

$$(4^2)^3 = (4)^6$$

Exponente cero

El exponente cero aparece cuando se dividen dos potencias iguales:

$$2^4 : 2^4 = 2^{4-4} = 2^0$$

Pero, en este caso estamos dividiendo un número por sí mismo

$$2^4 : 2^4 = 1$$

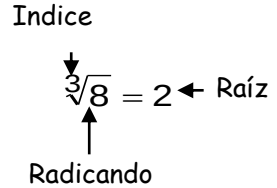
Luego:

$$2^0 = 1$$

Todo número natural distinto de cero elevado a la cero da por resultado 1

6. RADICACIÓN

La radicación es la operación inversa a la potenciación.



n general, la raíz enésima de un natural en lenguaje simbólico es:

$$\sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^{n} = \alpha$$

Propiedades de la radicación:

1.- La radicación **no es conmutativa**, por ejemplo:

$$\sqrt[3]{8} \text{ no es igual a } \sqrt[8]{3}$$

2.- La radicación no es distributiva con respecto a la suma y a la diferencia, por ejemplo:

$$\sqrt{9} - \sqrt{4} = 1 \text{ no es igual a } \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

3.- La radicación **es distributiva con respecto al producto y al cociente**

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : \sqrt[\gamma]{\alpha \,.\, \beta} = \sqrt[\gamma]{\alpha} \,.\, \sqrt[\gamma]{\beta}$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in N : \sqrt[\gamma]{\alpha : \beta} = \sqrt[\gamma]{\alpha} \,/\, \sqrt[\gamma]{\beta}$$

4.- La potencia de una raíz es igual a la raíz de la potencia del radicando.

$$\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^m = \sqrt[p]{\alpha^m}$$

$$\left(\sqrt[4]{24}\right)^3 = \sqrt[4]{24^3}$$

5.- La radicación de una raíz es igual a una raíz cuyo índice es igual al producto de los índices.

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{\alpha}} = \sqrt[p.q]{\alpha} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{\alpha}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3.2]{64} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$$

6.- Si el índice y el exponente del radicando de una raíz se multiplican o dividen por un mismo número, la raíz no varía.

$$\sqrt[p]{\alpha^q} = \sqrt[p.n]{\alpha^{q.n}} = \sqrt[p:n]{\alpha^{q:n}}$$

$$\sqrt[3]{32^4} = \sqrt[3.2]{32^{4.2}} = \sqrt[3:2]{32^{4:2}}$$

Números Enteros

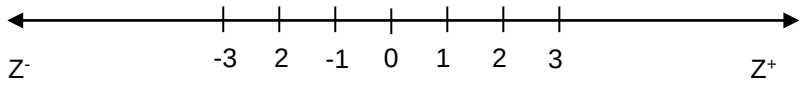
La sustracción o resta de dos números naturales existe si y sólo si el minuendo es mayor que el sustraendo. Para resolver el caso contrario, surgió el conjunto de los números enteros que se denota con Z. Este conjunto está formado por el conjunto de números naturales (o enteros positivos), el cero, y el conjunto de los enteros negativos, simbólicamente:

$$Z = N \cup \{0\} \cup Z^-$$

El conjunto de NUMEROS ENTEROS posee las siguientes **propiedades**:

- Es un conjunto infinito
- Cada número entero tiene un único antecesor y un único sucesor.
- Es un conjunto discreto, es decir entre dos números enteros existe un conjunto finito de números enteros.
- Cada número entero tiene opuesto (el opuesto de α es $-\alpha$ y el opuesto de $-\alpha$ es α)

Este conjunto se puede representar en una **recta numérica**:



Valor absoluto de un número entero

El valor absoluto de un número entero α, se indica como $|\alpha|$, es por definición igual a α si α es un número entero positivo o cero, e igual al opuesto de α si α es un número negativo. Simbólicamente:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \text{ si } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Puede decirse también que el valor absoluto o módulo de un número entero α es la distancia al cero, **la distancia es un número positivo.** Por ejemplo,

$$|6| = 6; |-4| = 4$$

Orden en el conjunto de números enteros

En la recta numérica, la flecha indica el orden creciente en valor absoluto. Puede afirmarse que:

- ✓ Dados dos números positivos, es mayor el de mayor valor
- ✓ **Dados dos números negativos es mayor el de menor valor absoluto**
- ✓ Todo número positivo es mayor que cero
- ✓ Todo número negativo es menor que cero

Puede observarse en la recta numérica que, por ejemplo, 3 >0; 2 < 3; -5 < -1; -3 < 1, etc.

Operaciones en el conjunto de Números Enteros

Dada la correspondencia entre los números naturales y los números positivos las operaciones en Z verifican las mismas propiedades que en N y además deben ampliarse.

1. SUMA O ADICIÓN

En la suma de números enteros se pueden presentar los siguientes casos:

a) Suma de números enteros del mismo signo

La suma de dos números enteros del mismo signo es otro número entero tal que su signo es igual al de los sumandos y su valor absoluto es igual a la suma de los valores absolutos de los sumandos.

Por ejemplo:

(+2)+(+3)= 2+3=5 (-4)+(-5)= - 9

b) Suma de números enteros de distinto signo

La suma de dos números enteros de distinto signo es otro número entero tal que su signo es igual al del número de mayor valor absoluto y su valor absoluto es igual a la diferencia de los valores absolutos de los sumandos.

Por ejemplo:

(+10)+(-3)= +7 (4)+(-9)= - 5

2. MULTIPLICACION O PRODUCTO

En el producto de números enteros se pueden presentar los siguientes casos:

a) Producto de números enteros del mismo signo

El producto de dos números enteros del mismo signo es otro número entero tal que su signo es positivo y su valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Por ejemplo:

(+2).(+3)= +6 (-4).(-5)= +20

b) Producto de números enteros de distinto signo

El producto de dos números enteros de distinto signo es otro número entero tal que su signo es negativo y su valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Por ejemplo:

(+10).(-3)= - 30 (4).(-9)= - 36

c) Producto de varios números enteros

El producto de varios factores distintos de cero es otro número entero tal que su signo es positivo si el número de factores negativos es par y negativo si el número de factores negativos es impar y su valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Por ejemplo:

(+1).(-3).(-2) = +6 (2 factores negativos) (4).(-2) (-2)(-3)= - 48

En la Tabla 1 se presentan, simbólicamente, las propiedades de la suma y del producto.

Tabla 1. Propiedades de la suma y el producto

Propiedad	Suma	Producto
Clausura	$\forall \alpha, \beta \in Z : \alpha + \beta \in Z$	$\forall \alpha, \beta \in Z : \alpha \,.\, \beta \in Z$
Conmutatividad	$\forall \alpha, \beta \in Z : (\alpha + \beta) = (\beta + \alpha)$	$\forall \alpha, \beta \in Z : (\alpha \,.\, \beta) = (\beta \,.\, \alpha)$
Asociatividad	$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Z : \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Z : \alpha\ (\beta \,.\, \gamma) = (\alpha \,.\, \beta)\ \gamma$
Distributividad	$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Z : \alpha\ (\beta + \gamma) = (\alpha \,.\, \beta) + (\alpha \,.\, \gamma)$	
Existencia de elemento neutro	$\forall \alpha \in Z : (\alpha + 0) = (0 + \alpha) = \alpha$	$\forall \alpha \in Z : (\alpha \,.\, 1) = (1 \,.\, \alpha) = \alpha$
Existencia de opuesto	$\forall \alpha \in Z, \exists - \alpha \in Z / \alpha + (-\alpha) = 0$	

3. RESTA

La diferencia de dos números enteros puede definirse como la suma del primero más el opuesto del segundo, simbólicamente:

$$\alpha, \beta \in Z : \alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Por ejemplo:

(+10)-(-3)= (+10) +[-(-3)]= (+10)+(+3)=13

(-2)-(+9)= (-2) + (-9)= -11

4. DIVISION

La división exacta de dos números enteros, es decir que el resto sea igual a cero, no siempre es posible, es necesario que el dividendo sea múltiplo del divisor.

División exacta de números enteros

Si se da este caso, entonces el resultado es otro número entero tal que su signo es positivo si los números tiene el mismo signo, es negativo si los números tienen distinto signo y el valor absoluto es el cociente de los valores absolutos de los números dados.

Por ejemplo:

(+64):(+8)= (+8) (-24):(+6)= - 4

5. POTENCIACION

La definición de n-ésima potencia dada para los números naturales es válida para los enteros, así como también las potencias con exponente 0 y 1. En lenguaje simbólico:

$$\forall \alpha \in Z \wedge n \in N : \alpha^n = \underbrace{\alpha.\alpha.\alpha \ldots \alpha}_{\text{n veces}}$$

$$\forall \alpha \in Z - \{0\} : \alpha^0 = 1$$

$$\forall \alpha \in Z : \alpha^1 = \alpha$$

La potencia de un número entero es negativa cuando la base es negativa y el exponente impar, en el resto de los casos es positiva.

Por ejemplo:

$(-2)^3 = -8$ $(-2)^4 = 16$

La potenciación de números enteros cumple las mismas propiedades que la potenciación de números naturales.

6. RADICACION

La definición de raíz n-ésima dada para los números naturales es válida para los enteros.

$$\alpha \in Z \text{ y } n \in N, \text{siendo } n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^n = \alpha$$

Si el índice de la raíz es impar, la raíz tiene el mismo signo que el radicando.

Si el índice es par y el radicando es positivo, las raíces son dos números opuestos.

Si el índice es par y el radicando es negativo, la raíz no tiene solución en Z.

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{+27} = +3 \text{ puesto que } (+3)^3 = 27$$

$$\sqrt[4]{+16} = \pm 2 \text{ puesto que } (+2)^4 = +16 \text{ y } (-2)^4 = +16$$

La radicación cumple con las propiedades de la radicación de números naturales y puede mencionarse otra propiedad:

Si el índice y el exponente del radicando son iguales:

a) la raíz es igual a la base de la potencia cuando el exponente es impar

b) la raíz es igual al valor absoluto de la base de la potencia cuando el exponente es par.

Por ejemplo:

$\sqrt[3]{(2)^3} = \sqrt[3]{8} = 2$ $\qquad$ $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = +4$

Números Racionales

En el conjunto de los números enteros, si el dividendo no es múltiplo del divisor, la división no puede realizarse. Para solucionar este problema surge el conjunto de los números racionales que se simboliza con Q.

Dados $\alpha, \beta \in Z$, $\beta \neq 0$, se denomina número racional a la fracción $\frac{\alpha}{\beta}$

α ← numerador

β ← denominador

Clasificación de fracciones

1.- Son *fracciones equivalentes* las que representan el mismo punto en la recta numérica y resultan de multiplicar numerador y denominador por el mismo número. Por ejemplo: $\frac{1}{3};\frac{2}{6};\frac{3}{9}$.

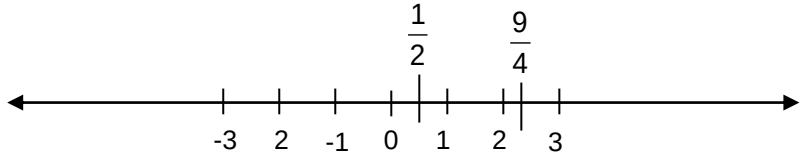
2.- Son *fracciones irreductibles* aquellas cuyo numerador y denominador son números coprimos, es decir no tienen divisores comunes. Por ejemplo: $\frac{2}{7};\frac{8}{9};\frac{3}{11}$.

3.- Son *fracciones aparentes* aquellas cuyo numerador es múltiplo del denominador. Son números enteros. $\frac{4}{2};\frac{12}{4};\frac{9}{3}$

El conjunto de NUMEROS RACIONALES posee las siguientes **propiedades**:

- Es un conjunto infinito
- Es un conjunto denso, es decir entre dos números racionales existe un conjunto infinito de números racionales.
- Es un conjunto ordenado.

Este conjunto se puede representar en una **recta numérica**:



Orden en el conjunto de números racionales

Para comparar dos números racionales $\frac{\alpha}{\beta}$ y $\frac{\gamma}{\delta}$ se debe considerar lo siguiente:

- ✓ $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha.\delta < \beta.\gamma$
- ✓ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha.\delta = \beta.\gamma$
- ✓ $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha.\delta > \beta.\gamma$

Operaciones en el conjunto de Números Racionales

Las cuatro operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación y división) tienen solución en Q, es decir son operaciones cerradas.

1.- SUMA O RESTA

Para sumar o restar fracciones es necesario que tengan el mismo denominador.

Para reducir fracciones a común denominador:

- ✓ se determina el máximo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores de las fracciones.
- ✓ Se calculan las fracciones equivalentes de cada término con ese denominador

En símbolos, $\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha.\delta \pm \beta.\gamma}{\beta.\delta}$

Por ejemplo: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1.3 + 2.2}{2.3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$

2.- PRODUCTO

El producto de dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de los factores, y cuyo denominador es el producto de los denominadores de los factores.

En símbolos: $\frac{\alpha}{\beta}.\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha.\gamma}{\beta.\delta}$

Por ejemplo: $\frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1.2}{2.3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3.- DIVISION

El cociente entre dos fracciones es igual al producto entre el dividendo y el inverso multiplicativo del divisor.

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta}.\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{-1} = \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\delta}{\gamma} \text{ con } \beta, \gamma \neq 0$$

Inverso multiplicativo

Dada una fracción $\frac{\gamma}{\delta}$, su inverso multiplicativo $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{-1}$ es otra fracción tal que multiplicada por la primera da por resultado 1. El resultado de $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{-1}$ es $\frac{\delta}{\gamma}$.

Si por ejemplo se tiene que dividir $\frac{4}{5}$ entre $\frac{2}{3}$:

$$\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}.\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{4}{5}.\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

4. POTENCIACION

Se consideran dos casos:

a) Potencia de exponente natural

Para elevar una fracción a la n-ésima potencia se eleva numerador y denominador a la n, en símbolos:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n}=\frac{\alpha^{n}}{\beta^{n}}$$

b) Potencia de exponente negativo

Una fracción de exponente negativo se puede transformar en una potencia tal que la base es la inversa de la base de la potencia dada y el exponente es positivo y de igual valor absoluto que el exponente de la potencia dada. Simbólicamente:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-n}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n} \text{ con } \alpha\neq 0$$

c) **Potencia de exponente racional**

La potencia $\frac{p}{q}$ *de una fracción se obtiene calculando la raíz q-ésima de la potencia p-ésima del número.* En símbolos: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{p}}$

Se cumplen las mismas propiedades que la potenciación de números naturales y enteros.

5. RADICACION

Simbólicamente:

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{x}{y}\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^{n}=\frac{\alpha}{\beta}$$

La regla de los signos es la misma que la enunciada para la radicación de números enteros.

Estas operaciones verifican las propiedades descriptas para números naturales y enteros. Se debe tomar en cuanta que el denominador debe ser distinto de cero.

Números Irracionales

Los números irracionales se denominan así por la imposibilidad de expresarlos como una fracción.

Un número es irracional si su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Dos ejemplos muy conocidos son: $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ y $\pi = 3{,}141592654\ldots$

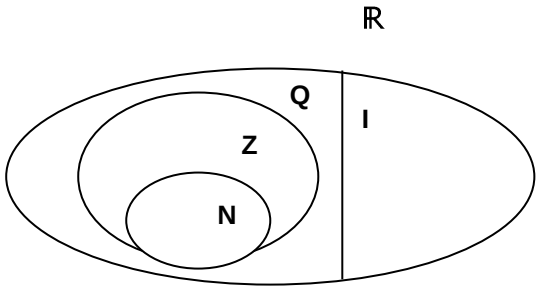
El conjunto de números irracionales se denota con I.

La representación gráfica de estos números completa la recta numérica.

Números Reales

La unión del conjunto de números irracionales, I, con el conjunto de los racionales Q da como resultado un nuevo conjunto que es el de los números reales. Este se denota con R.

Se tiene entonces: $\mathbb{R} = Q \cup I$ y además $N \subset Z \subset Q \subset \mathbb{R}$. Esquemáticamente:



El conjunto de NUMEROS REALES posee las siguientes **propiedades**:

- Es un conjunto infinito
- Es un conjunto denso, es decir entre dos números reales existe un conjunto infinito de números reales.
- Es un conjunto ordenado.

Este conjunto ocupa toda la **recta numérica**.

En el conjunto de NUMEROS REALES las operaciones suma, resta, multiplicación, división, cumplen con las propiedades de **clausura, conmutatividad, asociatividad, distributividad (de suma o resta respecto del producto o cociente), existencia de elemento neutro, existencia de opuesto.** Potenciación y radicación verifican todas las propiedades detalladas para todos los conjuntos numéricos incluidas en este conjunto infinito de números reales.

Trabajo Práctico N°1

Conjuntos numéricos

Números naturales

1. Calcule el resultado de las siguientes expresiones combinadas

a) $3 + 5 \cdot (4 - 3)$

b) $3 \cdot (4 + 2) - 3$

c) $3 \cdot (6 - 2) + 4 \cdot (2 + 3)$

d) $12 - (3 + 4 \cdot 2 - 1) + 4$

e) $18 – 4 \cdot (4 \cdot 2 - 6) + 15 : 3$

f) $5 \cdot (7 - 3 \cdot 2) - 12 : 4$

g) $8: (2 \cdot 4) + 6 : (3 \cdot 2)$

h) $4 \cdot 6 : 3 - (10 – 12 : 2 + 1)$

2. Calcule las siguientes potencias:

a) 2^5; b) 4^3; c) 5^0; d) 12^2; e) 9^3

3. Aplicando las propiedades de potencias de igual base resuelva:

a) $\frac{\alpha^2\alpha^8}{\alpha^3\alpha}$; b) $\frac{\alpha^3\alpha^1\beta^5}{\alpha^2\beta^3}$

4. Calcule las siguientes raíces:

a) $\sqrt{4}$; b) $\sqrt[3]{27}$; c) $\sqrt[4]{16}$; d) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2$; e) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$

Números enteros

5. Coloque el signo que corresponda: mayor, menor o igual.

a) -3 ... -12 b) $|-2| \ldots -2$ c) 0 ... 5 d) 6 .... 5 e) $-(-5) \ldots |-5|$ f) 0 ...-3

6. Calcule las siguientes:

a) sumas:

i) (-9) + (+12) + (+8) + (-21)+ (-1)

ii) (+10) + (-4) + (+11) + (-2)

b) diferencias:

i) (+24) – (+15)

ii) (+12) – (+32)

c) productos

i) (-10) . (+.2) . (+4)

ii) (-11) . (+3). (-2) . (+6) . (+4)

c) cocientes

i) (-32) : (-8)

ii) (+30) : (-6)

7. Realice las siguientes operaciones:

a) {(+15) - [(+4) - (-6) + (+3)]}

b) (-14) + (-6) + [(-8) - (-2) + (-1) - (+4)]

c) – [(-7) + (-2)] + [(-9) – (-2) – (-1)] - (+30)

d) – {(-6) + [(-2) – (-10)] + [(-1)-(+2)]} + (+12)

8. Resuelva las siguientes operaciones combinadas

a) (-10 – 8) : (-9) + (- 3).(-4)
b) [(+10). (-3) – (-2). (+3)]: (- 4 + 1)
c) {18 - [3 + 18 : (3 · 2)]} : (9 - 3)
d) 12 - [(3 · 4 + 2) - (9 - 2 · 3)]

9. Resuelva aplicando las propiedades convenientes de la potenciación:

a) $(-3)^3 . (-2) . (-4)^0$
b) $\{[(-2)^2]^3\}^4$
c) $[(-3) . 2(-5)]^3$
d) $[2 . (-2) + (-4)^2]^3$
e) $[(-4)^8 : (-2)^2] . (-3)^3$

10. Resuelva aplicando las propiedades convenientes de la radicación:

a) $\sqrt{25.36.64}$
b) $\sqrt[3]{8.27.64}$
c) $\sqrt[5]{-32}.(-2+4):(-2)^2$
d) $(-6+2)^3 : 2 - \sqrt[3]{64}.(-2)^0$

Números racionales

11. Calcule la fracción irreducible equivalente a cada una de las dadas.

a) $\frac{30}{15}$ b) $\frac{42}{49}$ c) $-\frac{24}{54}$ d) $\frac{81}{45}$

12. Escriba fracciones equivalentes a las indicadas.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{8}$

13. Escriba mayor, menor o igual, según corresponda:

a) $\frac{1}{5} \cdots \frac{2}{3}$ b) $-\frac{2}{10} \cdots \frac{7}{49}$ c) $\frac{14}{25} \cdots -\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{81} \cdots \frac{2}{3}$

14. Encuentre el resultado de:

a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+\frac{5}{8}$ b) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ c) $\frac{4}{3}+\frac{7}{8}+\frac{3}{9}$ d) $\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-\frac{5}{4}$

15. Determine el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{4}{3}:\frac{1}{8}\right).\left(\frac{8}{20}:\frac{10}{2}\right)$ b) $\left(\frac{5}{21}:\frac{3}{25}\right).\left(\frac{8}{20}:\frac{10}{2}\right)$ c) $\left(-\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{3}{8}\right)$

16. Efectúe las siguientes operaciones indicadas:

a) $\left[\left(2-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{4}:\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right].\frac{1}{9}$

b) $\left[\left(\frac{3}{4}-3\right)+\frac{1}{9}:3\right]:\left(-\frac{3}{2}+5-\frac{7}{6}\right)$

c) $\dfrac{\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{10}\right).\left(-\frac{3}{2}\right):\frac{4}{3}}{-3+\frac{1}{8}}:\frac{2}{9}$

d) $\dfrac{\left(\frac{2}{5}:5\right)+\left(-\frac{6}{7}\right)}{-\frac{3}{4}:\frac{5}{8}-\frac{2}{9}}+4$

17. Calcule las siguientes:

a) potencias

i) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ ii) $\left(\frac{2}{9}\right)^2$ iii) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}$ iv) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

b) raíces

ii) $\sqrt[3]{\frac{8}{64}}$ ii) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$ iii) $\sqrt{-\frac{1}{36}}$ iv) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$

18. Efectúe las siguientes operaciones combinadas:

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}.\left(-\frac{5}{8}\right):\frac{2}{3}$

b) $-\frac{1}{9}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right).\left(\frac{3}{2}\right)}.\left(\frac{4}{7}\right)$

c) $\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{1}{64}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

d) $\sqrt{1-\frac{7}{16}}.(-2)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}:\frac{3}{2}$

Problemas de aplicación

I) Un camión transporta 5000 L de leche para suministrar a tres fábricas de productos lácteos. En la primera descarga 1500 L, y en la segunda, 865 L. Después de abastecer a la tercera fábrica, todavía quedan 1975 en la cisterna del camión; ¿con cuántos litros se ha aprovisionado a esta última?

II) En una panadería se dispone de 40 docenas de huevos para hacer 50 bizcochuelos y con los huevos que sobren, algunas galletas. Por cada bizcochuelo se emplean 6 huevos, y por cada docena de galletas, 4 huevos. ¿Cuántas galletas podrán hacerse?

III) En una granja avícola se han recogido 6500 huevos. En el control de calidad se retiran 260,

Con el resto se preparan 120 cajas de dos docenas y los demás se reparten en cajas de una docena. ¿Cuántas cajas de una docena se preparan en total?

IV) Se tiene un campo de 12 ha por 4 ha. Se quiere arar los dos tercios del campo ¿Cuántas ha quedarán sin arar?

V) La compra de reactivos de un laboratorio de análisis de suelos costó $ 4500.- Si un quinto del total corresponde a solventes orgánicos, dos tercios a reactivos sólidos y el resto a reactivos líquidos ¿Cuál es el monto en pesos de cada uno de estos insumos?

UNIDAD 2

FUNCION DE PRIMER GRADO

Función de primer grado

Una gran cantidad de relaciones que se utilizan en forma cotidiana involucran a dos o más variables de manera que el valor de una de ellas depende del valor de las otras. Por ejemplo, el volumen que ocupa un gas depende de la presión que soporta; la distancia recorrida por un auto depende de la velocidad; el sueldo que cobra una persona está en función de su trabajo, etc.

Si se consideran dos variables que están relacionadas de manera que a cada valor de una de ellas le corresponde un único valor de la otra, la relación que existe entre ellas se denomina **función**.

Una variable **y** se dice que es **función** de otra variable **x**, cuando a cada valor de **x** le corresponde **uno y sólo un valor** de **y**. En símbolos se escribe **y=f(x)** que se lee "y es igual a f de x o y es función de x". A **x** se la denomina **variable independiente** y a **y variable dependiente.** El conjunto de valores que puede tomar la variable independiente se llama conjunto de partida o dominio de la función D(f) y el conjunto de valores de y se designa como conjunto de llegada, codominio o imagen de la función Im(f).

Las funciones se designan con letras minúsculas f, g, h, etc. Simbólicamente, se escribe f: $x \rightarrow y$, se lee f aplica x en y o f transforma x en y. Si A es el conjunto de partida y B el de llegada se puede escribir f: $A \rightarrow B$. Si los conjuntos involucrados son numéricos las funciones se denominan funciones numéricas o escalares.

- ✓ La función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

  $x \rightarrow ax + b$

donde a y b son constantes y pertenecientes al conjunto de los números reales R y con $a \neq 0$ se llama **función lineal** o **función de primer grado en la variable x**. Puede definirse como un conjunto de pares ordenados de la forma: $f= \{(x,y) \in R \times R / y= ax + b;\ a \wedge b \in R\ ;\ a \neq 0\}$

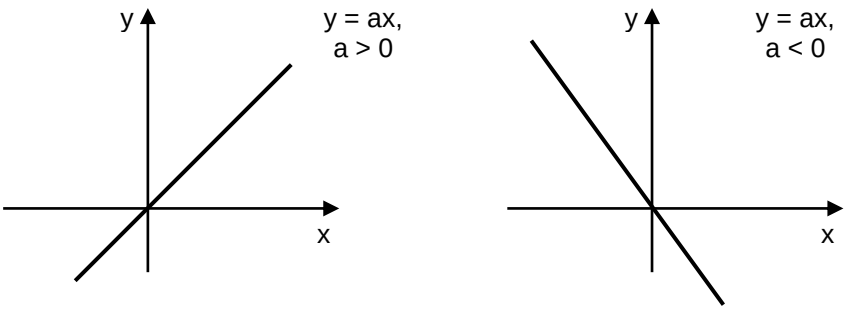
La función lineal puede representarse gráficamente en el plano real como una **línea recta**, la igualdad y = ax + b se denomina ecuación explícita de la recta.

$y = a\,x + b$ ← Parámetro de posición, u **ordenada al origen**

↑ Parámetro de dirección, coeficiente angular o **pendiente**

Casos particulares

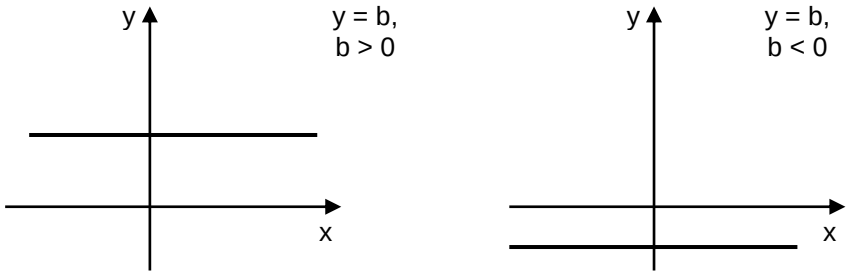
a) Si b = 0, la ecuación se escribe y = ax, y representa a una recta que pasa por el origen de coordenadas.



Como puede observarse D(f) = $\mathbb{R}$ y Im(f)= $\mathbb{R}$.

En particular si a = 1, la ecuación se transforma en y = x, es la **función identidad** y su gráfica es la recta llamada 1º bisectriz o también recta de 45º.

b) Si a = 0 y b $\neq$ 0, la ecuación se escribe y = b. La función definida por esta ecuación se denomina **función constante** y su representación grafica es una recta paralela al eje $\overrightarrow{OX}$.



En estos casos D(f) = R y Im(f)= $\{b\}$.

c) Si a = 0 y b = 0, la ecuación se transforma en y = 0. La función definida por esta ecuación se denomina **función nula**, su gráfico es una recta que coincide con el eje $\overrightarrow{OX}$. En este caso D(f) = $\mathbb{R}$ y Im(f)= $\{0\}$.

d) El conjunto f = $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = c \wedge c \in \mathbb{R}\}$ que **NO REPRESENTA A UNA FUNCION**, es un conjunto de pares ordenados que se caracteriza por tener la primera componente igual a c y la segunda componente varía en el conjunto R. Su gráfica es una recta paralela al eje $\overrightarrow{OY}$, cuya ecuación es x = c, en este caso **NO TIENE PENDIENTE**.

Ecuación de primer grado o lineal en una variable

Sea la función de primer grado definida por:

$$y = ax + b \qquad (1)$$

si se hace y = 0, la ecuación anterior se expresa como:

$$ax + b = 0 \qquad (2)$$

A esta ecuación (2) se la denomina **ecuación de 1° grado en la variable x.** Como puede verse, el primer miembro de (2) es un polinomio en x, es decir P(x) = 0. Por lo tanto, *resolver una ecuación de 1º grado en la variable x consiste en encontrar los ceros de la función polinomial o las raíces de la ecuación polinómica.*

Como la ecuación es de primer grado con una incógnita, tiene una sola raíz, es decir **un único valor de x satisface la ecuación**. LA SOLUCIÓN ES UNICA.

Geométricamente hallar el valor de x de la ecuación (2) significa encontrar la abscisa del punto que tiene ordenada nula (y=0), es decir el punto de intersección de la gráfica de la función f con el eje $\overrightarrow{OX}$.

Por ejemplo, si se tiene la recta y= 3x + 1, el punto de intersección de ésta con el eje $\overrightarrow{OX}$ es:

$$3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

Trabajo Práctico Nº 3

Funciones y ecuaciones de primer grado

1. Dadas las siguientes funciones lineales analice parámetros, grafique.

a) $y=\frac{3}{4}x-2$

b) $y=-2x-2$

d)y=-x

c) $y=-\frac{1}{4}x+6$

f) y = -2

g) 3y + 4x=6

2. Dadas la pendiente y la ordenada al origen, escriba la ecuación de la recta:

a) $a=-2 \quad b=\frac{2}{3}$

b) $a=\frac{1}{3} \quad b=-\frac{5}{2}$

c) a= 0 b= 4

d) a=2 b = 6

3. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales en la variable x:

a) $x + 16 = 41$
b) $9x – 45 + 4x – 16 = 4$
c) $2x – 3 + x – 35 = 2 – 9x – 4$
d) $3 \cdot (x – 2) + 9 = 0$
e) $8x + 7 – 2x + 5 = 4x + 12 – (x – 30)$
f) $x + (x + 2) = 36$
g) $2 \cdot (3x – 2) – (x + 3) = 8$
h) $2 \cdot (13 + x) = 41 + x$
i) $2 \cdot (x – 3) – 3 \cdot (4x – 5) = 17 – 8x$
j) $4x – 3 \cdot (1 – 3x) = –3$
k) $4 \cdot (2x) – 3 \cdot (3x – 5) = 12x – 180$
l) $6 – x = 4 \cdot (x – 3) – 7 \cdot (x – 4)$
m) $3 \cdot (2x – 6) – [(x – (3x – 8) + 2) – 1] = 2 – (3 – 2x)$

UNIDAD 3

POLINOMIOS

POLINOMIOS

Antes de desarrollar la teoría de polinomios, es necesario definir los siguientes conceptos:

Expresión algebraica racional: es toda combinación de números y variables (que se denotan con letras), en ella las variables están afectadas por las siguientes operaciones: suma, resta, multiplicación, división y potenciación. Por ejemplo: $3x^2 + 2x+3$.

Las expresiones algebraicas racionales se clasifican en: expresiones algebraicas racionales enteras y fraccionarias.

Expresión algebraica racional entera: son expresiones en las que las variables están vinculadas por las operaciones de suma, resta y multiplicación. Las potencias son con exponentes naturales. Por ejemplo: $x^3 + 4xy - \sqrt[3]{3}\,y^4 + \frac{1}{8}b^5$ es una expresión algebraica racional entera puesto que las operaciones de radicación y división afectan a los coeficientes y no a las variables.

Expresión algebraica racional fraccionaria: son expresiones en las que alguna de las variables forma parte de un divisor o presenta exponente negativo. Por ejemplo: $4x^3 + 6x^{-2}y + \frac{1}{3}b^4$

Expresión algebraica irracional: son expresiones en las que alguna de las variables está afectada por radicales o exponente fraccionario. Por ejemplo: $x^3 + \sqrt[3]{y} + x^{\frac{2}{3}}$.

POLINOMIOS

Polinomio es toda expresión algebraica racional entera. Se puede decir que se llama forma polinómica de grado **n** o polinomio formal de grado **n** en una indeterminada x en el conjunto de los números reales (R) a toda expresión de la forma:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

siendo $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n \in R;\ a_n \neq 0$ y $n \in N$.

El *grado* de un polinomio es el mayor exponente de la indeterminada o variable cuyo coeficiente es distinto de cero.

Los números reales $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$ se denominan coeficientes de x. Un polinomio en una indeterminada x se simboliza con letras mayúsculas por ejemplo, P(x) que se lee “P de x”.

a_0 se llama término independiente y a_n coeficiente principal o director.

Si el polinomio tiene un solo término se denomina *monomio*, si tiene dos términos se denomina *binomio*, con tres es un *trinomio*, con cuatro es un *cuatrinomio*.

Polinomios especiales

Polinomio **nulo**: es aquel que tiene todos sus coeficientes iguales a cero. P(x)=0.

Polinomio **mónico**: es aquel que tiene su coeficiente principal igual a 1. Por ejemplo:

$P(x)=3 + 4x^2 + x^6$ es un polinomio mónico de grado 6.

Polinomio **ordenado**: un polinomio está ordenado si todos los términos que lo componen están ordenados de manera creciente o decreciente según los exponentes de la variable o indeterminada.

En forma creciente: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$

En forma decreciente: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Polinomio **incompleto**: es un polinomio al que le faltan algunos términos, para completarlo se agregan los términos faltantes con coeficiente cero. Por ejemplo:

$P(x)=3 + 4x^2 + 5 x^6$ es un polinomio incompleto, para completarlo se agregan términos:

$P(x)=3 + 0x + 4x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + 5 x^6$, este polinomio está completo y ordenado en forma creciente.

Función polinómica

- ✓ La función $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to P(x)= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

se denomina función polinomial o polinómica. También puede definirse como:

$$P= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \}$$

Esta función asigna valores a la variable x en el conjunto $\mathbb{R}$, es decir hace corresponder a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ un valor $P(x) \in \mathbb{R}$, llamado **valor de la función polinomial** en x. Por ejemplo, sea la función polinómica tal que:

$$P(x)= 2x^2 + x + 4$$

Si x = 2, resulta:

$$P(2)= 2(2)^2 + 2 + 4=14$$

Se dice entonces que 14 es el valor del polinomio para x = 2.

Casos particulares

- ✓ **Función constante**, definida por f(x)= k ó y = k, es una función polinómica de grado cero.
- ✓ **Función de primer grado**, definida por $f(x)= a_1 x + a_0$, es una función polinómica de grado uno.
- ✓ **Función de segundo grado o cuadrática**, definida por $f(x)= a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, es una función polinómica de segundo grado.

Ceros de una función polinomial, raíces de un polinomio

Se dice que **a** es un cero de una función polinómica P(x) si P(a) = 0.

Se dice que **a** es una raíz de la ecuación polinómica P(x) = 0 si al reemplazar x por a el primer miembro de la ecuación es igual a 0.

Por ejemplo, dada la función**:** P(X) =2 x + 1, el valor de x que la anula es $-\frac{1}{2}$, este es el cero de la función. Si consideramos el mismo polinomio pero expresado como una ecuación:

$$2x + 1 = 0,$$

despejando x se tiene: $x = -\frac{1}{2}$, esta es la raíz de la ecuación.

Operaciones con polinomios

1. Adición

La suma de dos polinomios es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen sumando los coeficientes de los términos de igual grado. El grado del polinomio resultante es igual al mayor grado de los polinomios sumandos.

En símbolos, sean:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\text{y } Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

La suma es:

$$P(x) + Q(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) =$$

$$= (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

Por ejemplo, sean $P(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4$ y $Q(x) = 3x^3 + x^2 + 2x$, su suma es:

$$P(x) + Q(x) = (2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4) + (3x^3 + x^2 + 2x) = (2+3)x^3 + \left(\frac{1}{2} + 1\right)x^2 + 2x + 4 =$$

$$= 5x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 4$$

2. Sustracción

La sustracción de dos polinomios es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen sumando a P(x) el opuesto de Q(x).

En símbolos, sean:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\text{y } Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

La resta es:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)] = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + (-b_n x^n - b_{n-1} x^{n-1} - \cdots - b_3 x^3 - b_2 x^2 - b_1 x - b_0) =$$

$$= (a_n - b_n) x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (a_3 - b_3) x^3 + (a_2 - b_2) x^2 + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0)$$

Por ejemplo, sean $P(x)= 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4$ y $Q(x)= 3x^3 + x^2 + 2x$, su diferencia es:

$$P(x) - Q(x) = (2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4) + (-3x^3 - x^2 - 2x)= (2-3)\, x^3 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) x^2 + 2x + 4=$$

$$= - x^3 - \frac{1}{2}\, x^2 + 2x + 4$$

3. Multiplicación

La multiplicación de dos polinomios consiste en multiplicar cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio y luego se suman los coeficientes de términos de igual grado.

En símbolos, sean:

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$\text{y } Q(x) = b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + b_0$$

El producto es:

$$P(x).Q(x) = (a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_0).(b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + b_0) =$$

$$= (a_n\, .b_m)\, x^{n+m} + (a_{n-1}\, .b_{n-1})\, x^{n+m-1} + \cdots + (a_0\, .b_0)$$

Por ejemplo, sean $P(x)= (2x^2 -3\, x + 1)$ y $Q(x)= (2\, x - 3)$, su diferencia es:

$$P(x)\, .\, Q(x) = (2x^2 -3\, x + 1) + (2\, x - 3)= (2x^2 -3\, x + 1).\, 2x + (2x^2 -3\, x + 1)\, (-3)=$$

$$= 4\, x^3 – 6\, x^2 + 2\, x - 6\, x^2 + 9\, x -3 =$$

$$= 4\, x^3 – 12\, x^2 + 11\, x – 3$$

En forma práctica:

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 2x^2 - 3x + 1 \\ . & \\ Q(x) = & \quad\quad 2\, x - 3 \\ \hline & -6x^2 + 9x - 3 \\ & 4x^3 - 6x^2 + 2x \\ \hline & = 4\, x^3 - 12\, x^2 + 11\, x – 3 \end{array}$$

Productos especiales

Cuadrado de un binomio

Sea $(x + a)^2$

$(x + a)^2= (x + a)\, (x + a)= (x + a)\, x + (x + a)\, a = x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$$\mathbf{(x + a)^2= x^2 + 2ax + a^2}$$

Por ejemplo, $(x + 4)^2 = x^2 + 2.4x + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

Además,

$$\mathbf{(x - a)^2= x^2 - 2ax + a^2}$$

4. División

Para realizar la división de dos polinomios, el polinomio dividendo debe tener grado mayor o igual que el del polinomio divisor, ambos deben estar ordenados en forma decreciente y el polinomio dividendo debe estar completo.

Dados P(x) de grado n y Q(x) de grado m, tal que n ≥ m, existe C(x) de grado (n-m) y R(x) tales que:

$$P(x)/Q(x) = C(x) \Leftrightarrow P(x) = C(x).Q(x) + R(x)$$

Donde C(x) es el cociente y R(x) es el resto. Si el resto es igual a cero, la división es exacta.

Por ejemplo, se quiere dividir $P(x)= 4x^3 - 3x + 1$ entre $Q(x)= x^2 – x$,

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 0x^2 - 3x + 1 & x^2 - x \\ \hline - 4x^3 + 4x^2 & = \underbrace{4x + 4}_{C(x)} \\ \hline 4x^2 - 3x & \\ - 4x^2 + 4x & \\ \hline \underbrace{x + 1}_{R(x)} & \end{array}$$

Trabajo Práctico N° 4

Polinomios

1. Indique para cada polinomio su grado, su coeficiente principal, complételo si es necesario y determine el valor de P(2) y P(-1)

a) $P(x)=x^3-3x^2+x-5$ b) $P(u)=\sqrt{5}-u^3$ c) $P(t)=8$

d) $P(z)=-z^4-3z^2+5$ e) $P(t)=0$ f) $P(x)=3x^{12}-x^4-5x^2+3$

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones no son polinómicas? Justifique su respuesta.

a) $f(x)=\frac{1}{4}x^4$

b) $f(x)=5x^2+2+\log x$

c) $f(x)=4+\frac{1}{x^3}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{30}\,x^2+x^3+8$

g) $f(x)=-8+x^4+3\sqrt{x}$

h) $f(x)=4$

3. Encuentre el valor de α en los polinomios para que se cumplan las condiciones indicadas:

a) $P(x)=x^3-3x^2+\alpha x-5$ si $P(2)=7$

b) $P(z)=-z^4-\alpha z^2+5$ si $P(1)=4$

4. Realice las siguientes operaciones:

a) $(2x^3-9x^2-4+5x)+(6x^4+x^2-5x)$

b) $(x^4-9x^2+1)+(10x^3+23x^2+12x)$

c) $(-3x^4+5x-2x^3-3)-(27x^3+36x-54x^2+8)$

d) $(5x^3+2x-4x^2-3)-(5x^2+14-6x)$

e) $(-4x^4+3x^2-1+x)-(2-5x^3-4x^2)$

5. Dados los polinomios:

$A(x)=3x-2$

$B(x)=x^2-2x+3$

$C(x)=2x^3+5x^2-4x-1$

Encuentre:

i) [A(x)] [B(x)]

ii) [A(x)] [C(x)]

iii) [A(x)] [B(x) + C(x)]

v) [A(x)] [B(x) - C(x)]

6. Dados los polinomios:

$A(x)=4x^5-3x^4+2x^3-5x+1$

$B(x)=x^2-x+1$

$C(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

Determine:

i) [A(x)] / [B(x)]

ii) [A(x)] / [C(x)]

iv) [C(x)] / [B(x)]

v) [A(x)] / [B(x) - C(x)]

7. Calcule:

a) $(4 + x)^2$

b) $(x + 3)^2 =$

c) $(5 + a)^2 =$

d) $(6x + y)^2 =$

d) $(9 + 4x)^2 =$

e) $(7x + 11)^2 =$

f) $(a + b)^2 =$

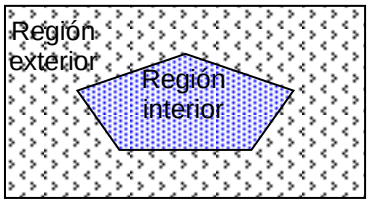
g) $(1 + 3x^2)^2 =$

UNIDAD 4

FIGURAS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS

Figuras y Polígonos

Si se considera un multilátero simple cerrado, este divide al plano en dos regiones: una interior y otra exterior. Una **figura geométrica** puede definirse como el conjunto de puntos que constituyen a ese multilátero (es la frontera o elemento de separación).

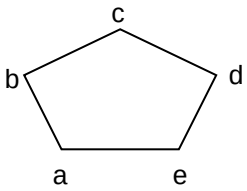


Se define a un **polígono** (*poli*: muchos y *gonos:* ángulos) como el conjunto de puntos de una poligonal cerrada y todos los puntos interiores a ella.

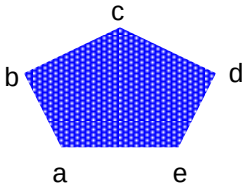
En el esquema que sigue se puede observar a abcde como un multilátero simple cerrado (es una figura).

La región interior se denomina **polígono abierto**.

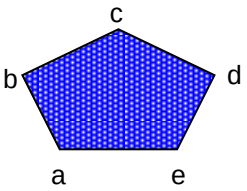
La unión del polígono abierto y el multilátero se denomina **polígono cerrado abcde.**



Multilátero abcde



Polígono abierto abcde



Polígono cerrado abcde

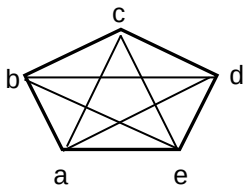
Elementos de un polígono

Las características de un polígono dependen de la posición de los puntos a, b, c, d, e que se denominan **vértices**.

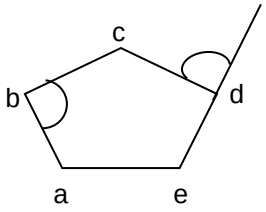
Los segmentos determinados por pares de vértices consecutivos se denominan **lados** del polígono.

Son lados del polígono abcde: $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}$ y $\overline{ea}$

Los segmentos determinados por pares de vértices no consecutivos se denominan **diagonales**.



Son diagonales del polígono abcde: $\overline{ac}, \overline{ad}, \overline{bd}, \overline{be}, \overline{ce}$,



Angulo interior: ángulo formado por dos lados consecutivos considerando sean también puntos interiores del polígono.

Angulo exterior: esta formado por uno de los lados de la poligonal y la prolongación del consecutivo.

Clasificación de los polígonos según el número de lados

Los polígonos reciben nombres particulares de acuerdo con el número de lados que presenten:

Número de lados	Nombre	Número de lados	Nombre
3	Triángulo	9	Eneágono
4	Cuadrángulo	10	Decágono
5	Pentágono	11	Undecágono
6	Exágono	12	Dodecágono
7	Eptágono	15	Pentadecágono
8	Octógono	20	icoságono

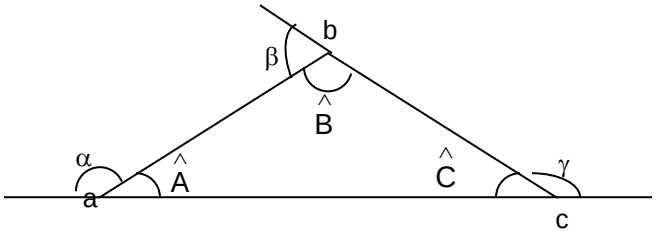
Polígonos regulares

Si un polígono tiene sus lados y sus ángulos congruentes se denomina **polígono regular.** Como ejemplos se verán triángulos y cuadriláteros.

Triángulos

Los triángulos son polígonos de tres lados.

Los elementos de un triángulo son los siguientes:

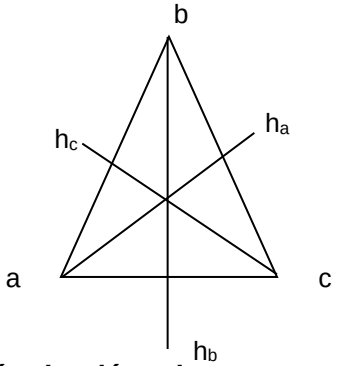


Vértices: a, b, c

Lados: $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$

Angulos interiores: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

Angulos exteriores: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$



La **altura** h es un elemento secundario importante e útil para la resolución de una serie de situaciones problemáticas.

Clasificación de triángulos

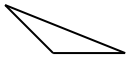
Los triángulos se clasifican: según sus lados y según sus ángulos.

Según sus ángulos:

- Acutángulo: tiene sus tres ángulos congruentes.

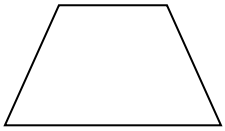
- Rectángulo: tiene un ángulo recto
- Obtusángulo: tiene un ángulo obtuso.

Según sus lados:

- Isósceles: tiene por lo menos dos lados congruentes
- Escaleno: no tiene lados congruentes. 
- Equilátero: tiene los tres lados congruentes

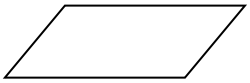
Cuadriláteros

Los cuadriláteros son multiláteros de 4 lados, de acuerdo con sus características se distinguen los siguientes cuadriláteros especiales:



Trapecio: es todo cuadrilátero que tiene por lo menos un par de lados paralelos

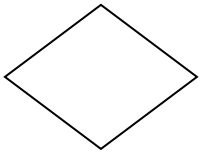
Los lados paralelos se denominan **bases.**



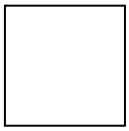
Paralelogramo: es un trapecio con los dos pares de lados paralelos.

Rectángulo: es todo cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos.

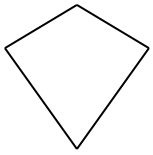
El rectángulo es también paralelogramo y trapecio rectángulo isósceles.



Rombo: es todo cuadrilátero que tiene sus lados congruentes.



Cuadrado: es todo cuadrilátero que tiene sus lados y sus ángulos congruentes.



Romboide: es todo cuadrilátero que tiene dos pares de lados consecutivos congruentes.

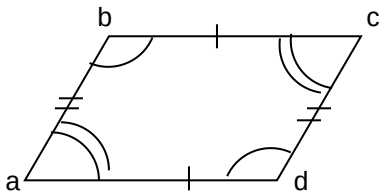
Propiedades de los lados y de los ángulos

Trapecio

Tiene un par de lados paralelos

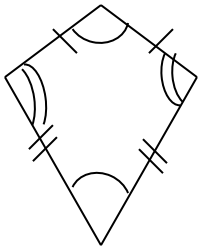
Trapecio rectángulo: tiene además un par de ángulos rectos.

Trapecio isósceles: además los lados distintos de las bases son congruentes y los ángulos adyacentes a cada base son congruentes.



Paralelogramo

Cumple la propiedad de los trapecios y además por definición en todo paralelogramo los lados opuestos son paralelos. Además, en todo paralelogramo los lados opuestos son congruentes y los ángulos opuestos son congruentes.

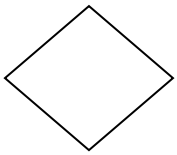


Romboide

Todo romboide tiene dos pares de lados consecutivos congruentes y un par de ángulos opuestos congruentes.

Rectángulo

Todo rectángulo además de las propiedades enunciadas para trapecios y paralelogramos tiene sus ángulos congruentes y son rectos.



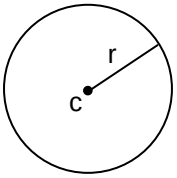
Rombo

Un rombo es un paralelogramo y un romboide por lo tanto cumple contadas las propiedades de estos cuadriláteros y además tiene sus lados congruentes.

El **cuadrado** cumple con todas las propiedades de los lados y ángulos enunciadas para las distintas clases de cuadriláteros.

Circunferencia

La circunferencia de centro c y radio r se define como el conjunto de puntos del plano cuya distancia c es igual a r.



Perímetros y Áreas de polígonos

Perímetros

Perímetro de un polígono

Se llama perímetro de un polígono a la suma de los lados del mismo.

Por ejemplo, el perímetro del polígono abcde es:

$$\text{Per. abcde} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ea}$$

Perímetro de un polígono regular

En un polígono regular, todos los lados son iguales, por lo tanto el perímetro es igual al producto de la longitud de uno de los lados (L) por el número de lados (n).

$$\text{Per. Polígono regular} = n \cdot L$$

Perímetro de una circunferencia de radio r y diámetro D es:

$$\text{Per. Circunferencia} = 2\pi.r = \pi . D$$

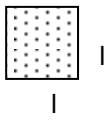
Áreas

- ✓ **Área del rectángulo**: es el producto de la longitud de su base b por la longitud de su altura h.

  Area rectángulo= b . h

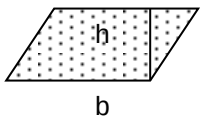
- ✓ **Área del cuadrado**: como la base es igual a la altura

  Area cuadrado= l^2



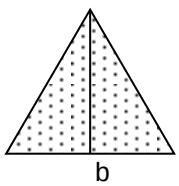
- ✓ **Área del paralelogramo:** como un paralelogramo es equivalente a un rectángulo que tenga base y altura congruentes

  Area paralelogramo = b . h

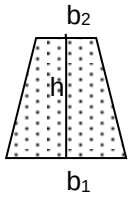


- ✓ **Área del triángulo**: como un triángulo es equivalente a un paralelogramo que tiene la misma altura h y cuya base sea igual a la mitad de la base de un triángulo.

  Area triángulo = $\frac{1}{2}$b.h

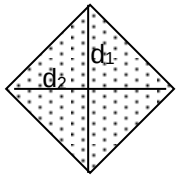


- ✓ **Área del trapecio**: como un trapecio es equivalente a un triángulo que tiene la misma altura h y cuya base sea igual a la suma de la bases del trapecio.



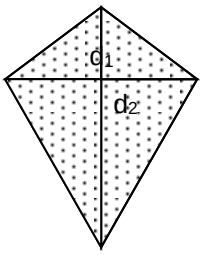
Area trapecio = $\frac{1}{2}(b_1 + b_2).h$

- ✓ **Área del rombo: se consideran las diagonales d1 y d2**.



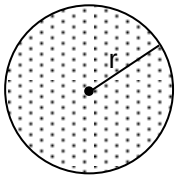
Area rombo = $\frac{1}{2}(d_1.d_2)$

- ✓ **Área del romboide**: se consideran las diagonales d_1 y d_2.



Area romboide = $\frac{1}{2}(d_1.d_2)$

- ✓ **Área del círculo**: considerando radio r



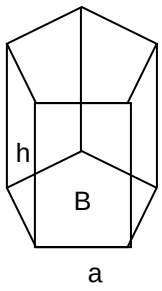
Area círculo = π r²

Cuerpos geométricos

Las áreas (A) y volúmenes (V) de los mas utilizados cuerpos geométricos se detallan a continuación.

Prisma

Cuerpo geométrico cuyas bases son dos polígonos iguales y paralelos y sus caras laterales son paralelogramos.



Superficie = Área lateral + área de las bases superior e inferior

Si se llama B al área de la base, y el área lateral de cada una de las 5 caras es A_L = a.h, entonces:

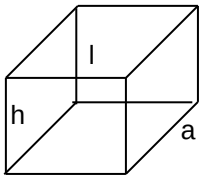
A_{prisma}= 5 A_L + 2B

Volumen= Superficie de la base . altura

V_{prisma}= B.h

Ortoedro

Prisma cuyas bases son dos rectángulos.



Si l es el largo, a es el ancho y h la altura, entonces

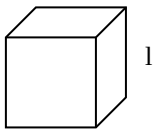
$A_{ortoedro}$= 2(ah +al+ hl)

Volumen= Superficie de la base . altura

V_{prisma}= a . l. h

Cubo

Ortoedro en el que las tres dimensiones son iguales.

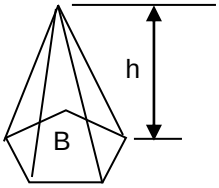


$A_{cubo}= 6\ l^2$

$V_{cubo}= l^3$

Pirámide

Cuerpo geométrico cuya base es un polígono cualquiera y sus caras laterales triangulos.



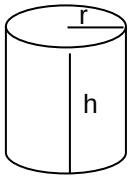
Si se llama B al área del polígono de n lados que constituye la base, y el área lateral de cada uno de los triángulos que forman sus n caras es A_L, entonces:

$A_{pirámide}= B + n\ A_L$

$V_{pirámide} = \frac{1}{3}Bh$

Cilindro

Es el cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un rectángulo alrededor de uno de sus lados



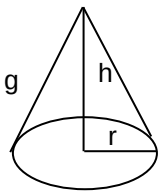
La superficie de la base $B= \pi r^2$ y el área lateral es $A_L= 2\pi r\, h$, entonces:

$A_{cilindro}= B + A_L=\pi r^2 + 2\pi r\, h$

$V_{cilindro} = \pi r^2\, h$

Cono

Es el cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus lados.



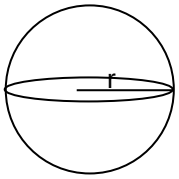
Siendo r el radio de la base, h la altura y g generatriz del cono

$A_{cono}= \pi r(g+r);\ g = \sqrt{h^2 + r^2}$

$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Esfera

Cuerpo geométrico engendrado por la revolución completa de un semicírculo alrededor de su diámetro.



Siendo r el radio

$A_{esfera}= 4\pi r^2$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Trabajo Práctico Nº 5

Figuras y Cuerpos geométricos

1. Calcule la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 12cm.

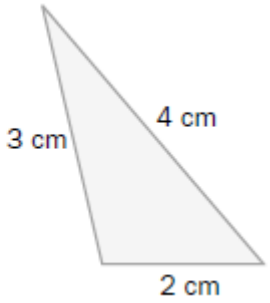
Longitudes y áreas

Perímetros

1- Calcula el perímetro de las siguientes figuras.

a)

b)



2- Halla el perímetro de estas figuras.

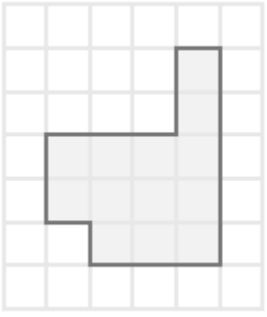
a) Un cuadrado de 6 centímetros de lado.

b) Un triángulo isósceles cuya base mide 5 centímetros, y cuyos lados iguales miden 8 centímetros.

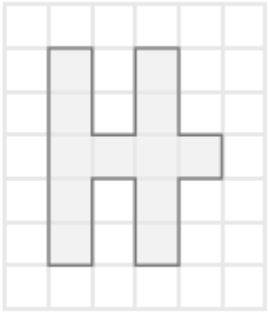
c) Un hexágono regular cuyo lado mide 7 centímetros.

3. Calcula el área de estas figuras, tomando como medida el cuadrado de la cuadrícula.

a)



b)



4. Halla el perímetro de las siguientes figuras.

a) Un dodecágono regular de 10 centímetros de lado.

b) Un rombo de 7 metros de lado.

c) Un romboide cuyos lados iguales miden 6 y 8 centímetros, respectivamente.

5. El perímetro de un cuadrado mide 36 centímetros. ¿Cuánto mide el lado?

6. El perímetro de un triángulo isósceles es de 54 decímetros. Si el lado desigual mide 20

decímetros, ¿cuánto miden los lados iguales?

Teorema de Pitágoras

7. Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 centímetros, respectivamente.

8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 centímetros, y un cateto, 8. ¿Cuántomide el otro?

9. Calcula la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 1 y 5 centímetros, respectivamente.

10. Halla la medida de la altura de estos triángulos.

a) Equilátero, cuyo lado mide 10 centímetros.

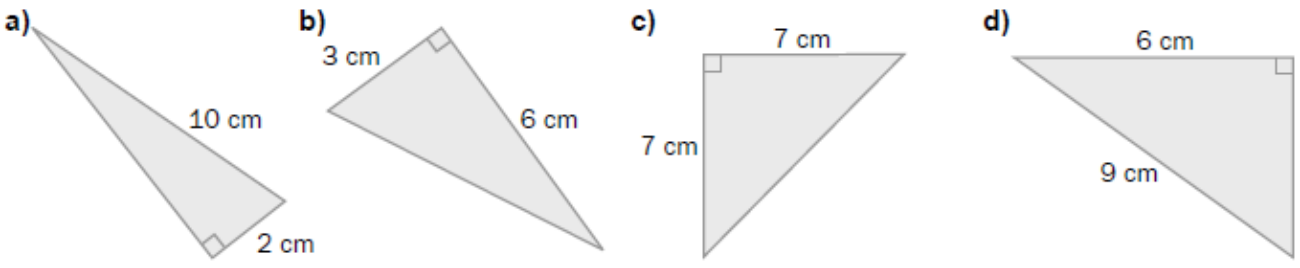
b) Isósceles, con la base de 4 centímetros, y lados iguales de 3 centímetros.

11. ¿Es posible que en un triángulo rectángulo la hipotenusa mida 2 centímetros, y cada cateto, 1 centímetro?

12. Los siguientes datos, en centímetros, corresponden a las medidas de los lados de dos triángulos. ¿Son triángulos rectángulos?

a) 15, 20 y 25 b) 3, 6 y 8

13. Halla el lado que falta en cada uno de los siguientes triángulos.



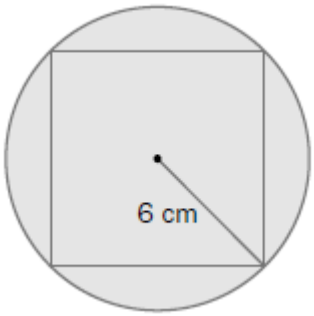
14. Halla la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 21 y 28 centímetros.

15. Calcula la altura de un triángulo equilátero cuyo lado, en centímetros, mide 26.

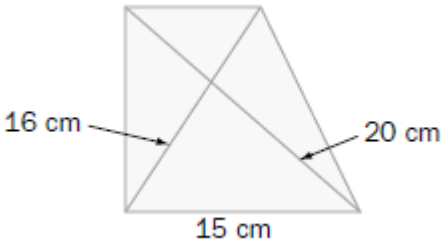
16. Determina la altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles sabiendo que los lados iguales miden 5 centímetros, y el lado desigual, 60 milímetros.

17. Halla el perímetro de un rombo sabiendo que sus diagonales miden 6 y 8 centímetros, respectivamente.

18. Con los datos de la figura, calcula el lado del cuadrado.



19. Averigua la medida de los lados de esta figura.



Áreas de figuras planas

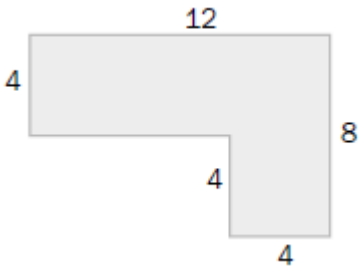
20. Calcula el área de estas figuras en las que las medidas vienen dadas en centímetros.

a)

b)

21. Halla el área de un rectángulo cuya base mide 15 centímetros, y su diagonal, 17.

22. Halla el área de la figura descomponiéndola antes en rectángulos y cuadrados.



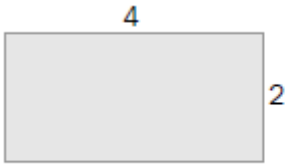
23. Halla el área de un paralelogramo de 6 centímetros de base y 25 milímetros de altura.

24. Calcula el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 7 centímetros, respectivamente.

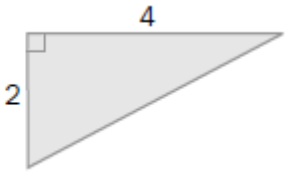
25. Halla el área de un rombo cuyas diagonales miden 6 decímetros y 100 centímetros, respectivamente.

26. Calcula el área de las siguientes figuras, cuyas longitudes vienen dadas en centímetros.

a)



b)



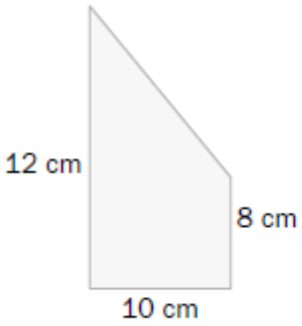
27. Halla el área de estas figuras.

a) Un cuadrado de 6 decímetros de lado.

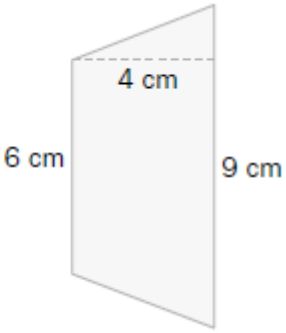
b) Un romboide de 5 centímetros de base y 3 centímetros de altura.

28. Calcula el área de estos trapecios.

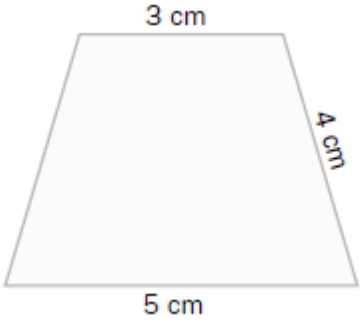
a)



b)



30. Halla el área del siguiente trapecio.

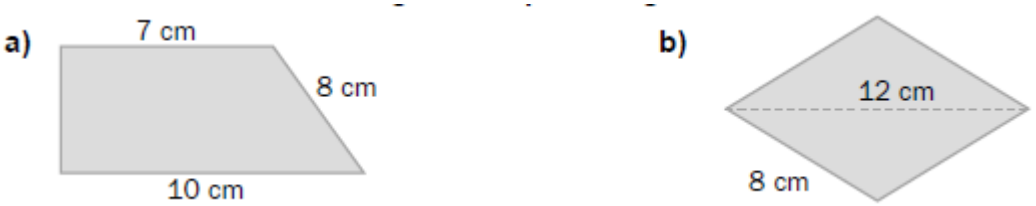


31. Halla el área de un decágono regular de 5 centímetros de lado y 7,69 centímetros de apotema.

32. ¿Cuál es el área de un pentágono regular de 8 centímetros de lado y 6,81 centímetros de radio?

33. Halla el área de estos polígonos regulares.

34. Determina el área de los siguientes paralelogramos.



1.-Calcula el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que tiene 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2500 mm de alto.

2.-Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1.5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de 6 € el metro cuadrado.

a) Cuánto costará pintarla.

b) Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla.

3.- En un almacén de dimensiones 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas de dimensiones 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¿Cuantas cajas podremos almacenar?

4.- Determina el área total de un tetraedro, un octaedro y un icosaedro de 5 cm de arista.

5.- Calcula la altura de un prisma que tiene como área de la base 12 dm^2 y 48 l de capacidad.

6.- Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.

7.- Un cilindro tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base. Y la altura mide 125.66 cm. Calcular:

a) El área total.

b) El volumen

8.- En una probeta de 6 cm de radio se echan cuatro cubitos de hielo de 4 cm de arista. ¿A qué altura llegará el agua cuando se derritan?

9.- La cúpula de una catedral tiene forma semiesférica, de radio 50 m. Si restaurarla tiene un coste de 300 € el m^2, ¿A cuánto ascenderá el presupuesto de la restauración?

10.- ¿Cuántas losetas cuadradas de 20 cm de lado se necesitan para recubrir las caras de una piscina de 10 m de largo por 6 m de ancho y de 3 m de profundidad?

11.- Un recipiente cilíndrico de 5 cm de radio y y 10 cm de altura se llena de agua. Si la masa del recipiente lleno es de 2 kg, ¿cuál es la masa del recipiente vacío?

12.- Para una fiesta, Luís ha hecho 10 gorros de forma cónica con cartón. ¿Cuánto cartón habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de generatriz?

13.- Un cubo de 20 cm de arista está lleno de agua. ¿Cabría esta agua en una esfera de 20 cm de radio?

Bibliografía

- Tapia, N. 1989. Matemática 1.Editorial Estrada. Buenos Aires.
- Tapia, N. 1989. Matemática 2.Editorial Estrada. Buenos Aires.
- Tapia, N. 1989. Matemática 3.Editorial Estrada. Buenos Aires.
- Tapia, N. 1989. Matemática 4.Editorial Estrada. Buenos Aires.
- Avila, M.; Rafael, B. 2005. Cuadernillo de Matemáticas para el Ingreso 2005. Facultad de Agronomía y Agroindustrias. UNSE

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SGO. DEL ESTERO

Programa “Ingreso Universitario - Modalidad Mayores de 25 años sin título secundario”

MÓDULO DE FISICA

Profesora Corvalán Valeria

Ingreso 2025

UNIDAD 1

MAGNITUDES FISICAS

MAGNITUDES FISICAS

La Física como Ciencia Fundamental

Física es la ciencia que estudia las propiedades y fenómenos de la naturaleza con la asistencia del lenguaje matemático. Es una ciencia experimental. Esta ciencia incluye el estudio de las propiedades de la materia, la energía, el tiempo y sus interacciones.

Puede decirse que la Física es una ciencia que tiene como objetivo medir y relacionar los resultados de estas medidas entre sí y con otras magnitudes que no son directamente medibles, y deducir de estas relaciones leyes cuantitativas que puedan ser comprobadas posteriormente mediante nuevas medidas.

Entre las principales teorías de la física, puede mencionarse a la **mecánica clásica** (que describe el movimiento macroscópico), el **electromagnetismo** (se encarga de los fenómenos electromagnéticos como la luz), la **relatividad** (analiza el espacio-tiempo y la interacción gravitatoria), la **termodinámica** (sobre los fenómenos moleculares y de intercambio de calor) y la **mecánica cuántica** (que estudia el comportamiento del mundo atómico).

Magnitudes Físicas

Se denomina **magnitud física** a aquellos parámetros que pueden ser medidos directa o indirectamente en una experiencia y expresar su resultado mediante un número y una unidad. Son ejemplos de magnitudes: la longitud, la masa, el tiempo, la superficie, la fuerza, la presión, la densidad, etc. Una medición es **directa** si se concreta a través de un instrumento de medida, y es **indirecta** si la medición se realiza a través de una variable que permite calcular otra distinta.

Las magnitudes físicas se utilizan para traducir en números los resultados de las observaciones; así el lenguaje que se utiliza en la Física es claro, preciso y terminante.

1.1 CLASIFICACIÓN DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS

1.1.1. Por su origen

Las magnitudes físicas, por su origen, se clasifican en fundamentales y derivadas.

Magnitudes Fundamentales
Son aquellas que sirven de base para escribir las demás magnitudes.

Las magnitudes fundamentales son:

- ✓ Longitud (L)
- ✓ Masa (M)
- ✓ Tiempo (T)
- ✓ Temperatura termodinámica (θ)
- ✓ Intensidad luminosa (J)
- ✓ Cantidad de sustancia (μ)
- ✓ Intensidad de corriente eléctrica (I)

Magnitudes Derivadas

Son aquellas magnitudes que se expresan en función de las magnitudes fundamentales: Por ejemplo, velocidad, trabajo, presión, aceleración, superficie (área), potencia, fuerza, densidad, etc.

1.1.2. Por su naturaleza

Las magnitudes se clasifican por su naturaleza en magnitudes escalares y vectoriales.

Magnitudes Escalares

Son aquellas magnitudes que están perfectamente determinadas con sólo conocer su valor numérico y su respectiva unidad.

Por ejemplo, volumen: 120 m^3, tiempo: 20 min, temperatura: 38 ºC

Magnitudes Vectoriales

Son aquellas magnitudes que además de conocer su valor numérico y unidad, se necesitan la dirección y sentido para que dicha magnitud quede perfectamente determinada.

Por ejemplo, en la Figura 1.1 se muestra que al bloque se le aplica una fuerza de 4 N, y la flecha (vector) indica que la fuerza es vertical y hacia arriba. La fuerza es una magnitud vectorial.

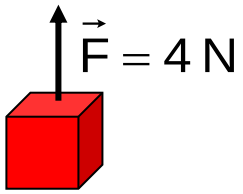


Figura 1.1. Fuerza aplicada a un cuerpo

De acuerdo con lo expresado anteriormente, se desprende que el concepto de magnitud está íntimamente relacionado con la idea de **medición**. Una magnitud física queda definida cuando se conocen las prescripciones para medirla, es decir se le asocia valores numéricos comparándola con otra de la misma clase tomada como unidad.

1.2. Sistemas de unidades

Un **sistema de unidades** es un conjunto ordenado de unidades de medida que guardan entre sí relaciones definidas y sencillas.

1.2.1. Sistema Internacional

El **Sistema Internacional de Unidades** (**SI**) es el resultado de un acuerdo alcanzado en 1960 por la Conferencia General de Pesas y Medidas y tiene vigencia en la actualidad.

Este Sistema Internacional de Unidades consta de 7 unidades **básicas o fundamentales** que permiten expresar las magnitudes fundamentales. Estas se detallan en la Tabla 1.

Tabla 1. Unidades básicas o fundamentales

MAGNITUD	UNIDAD	SIMBOLO	PATRON PRIMARIO
Longitud	metro	m	Longitud de onda de la luz emitida por una lámpara de criptón
Masa	kilogramo	kg	Cilindro de aleación de platino
Tiempo	segundo	s	Frecuencia de la radiación de un oscilador de cesio especial
Intensidad de corriente eléctrica	Ampere	A	Se basa en la fuerza magnética entre dos alambres que transportan la misma corriente
Temperatura termodinámica	Kelvin	K	Temperatura a la que hierve el agua y se congela simultáneamente si la presión es adecuada
Intensidad Luminosa	Candela	cd	Radiación de una muestra de platino preparada especialmente
Cantidad de sustancia	mol	mol	Definido partir de los átomos presentes en 12 g de carbono 12

Las **unidades derivadas** son las unidades correspondientes a las magnitudes derivadas, es decir resultan de la combinación de las fundamentales. Por ejemplo, la unidad de superficie, el m^2 resulta de combinar dos veces la longitud. En la Tabla 2 se presentan algunas de ellas.

Tabla 2. Ejemplo de unidades derivadas

MAGNITUD	UNIDAD	SIMBOLO
Fuerza	Newton	N
Area	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Velocidad	metro por segundo	m/s
Trabajo	Joule	J
Potencia	Watt	W
Presión	Pascal	Pa

La relación entre las unidades derivadas y las fundamentales se establece mediante las ecuaciones dimensionales.

1.2.2. Múltiplos y submúltiplos

En la Física, es muy frecuente usar números muy grandes, pero también números muy pequeños; para simplificar su expresión se utilizan los múltiplos y submúltiplos (Ver Tabla 3).

Tabla 3. Múltiplos y submúltiplos

Múltiplos				Submúltiplos		
Prefijo	**Símbolo**	**Factor de multiplicación**		**Prefijo**	**Símbolo**	**Factor de multiplicación**
Yotta	Y	10^{24}		yocto	y	10^{-24}
Zetta	Z	10^{21}		zepto	z	10^{-21}
Exa	E	10^{18}		atto	a	10^{-18}
Peta	P	10^{15}		femto	f	10^{-15}
Tera	T	10^{12}		pico	p	10^{-12}
Giga	G	10^{9}		nano	n	10^{-9}
Mega	M	10^{6}		micro	μ	10^{-6}
Kilo	k	10^{3}		mili	m	10^{-3}
Hecto	H	10^{2}		centi	c	10^{-2}
Deca	D	10^{1}		deci	d	10^{-1}

Los símbolos de los múltiplos o submúltiplos se escriben en singular.

Al unir un múltiplo o submúltiplo con una unidad del S.I. se forma otra nueva unidad. Por ejemplo, kilómetro (km), centímetro (cm), son nuevas unidades.

La escritura, al unir múltiplo o submúltiplo con una unidad del S.I. es la siguiente:

1. El número (valor de la magnitud).
2. El múltiplo o submúltiplo (dejando un espacio entre el número y el múltiplo o submúltiplo)
3. La unidad del S.I. (sin dejar espacio).

Por ejemplo:

20×10^3 m ≡20 kilómetros ≡ 20 km

4×10^{-2} m ≡ 4 centímetros ≡ 4 cm

1.2.3. Sistema cegesimal

El **sistema cegesimal de unidades**, también llamado **sistema CGS**, es un sistema de unidades basado en el **centímetro**, el **gramo** y el **segundo**. Su nombre es el acrónimo de estas tres unidades. El sistema CGS ha sido casi totalmente reemplazado por el Sistema Internacional de Unidades. Sin embargo se utiliza en algunos campos científicos y técnicos muy concretos.

1.2.4. Sistema Inglés

El **sistema inglés** de unidades o **sistema imperial**, es aún usado ampliamente en los **Estados Unidos de América** y, cada vez en menor medida, en algunos países con **tradición británica**. En este sistema las unidades fundamentales son:

Longitud: pie (ft)

Fuerza: libra fuerza (lb_f)

Masa: Libra - masa (lbm)

Energía, trabajo: Joule (J)

Tiempo: segundo (s)

Intensidad: Amperio (A))

Temperatura termodinámica: grados Rankine (º R)

1.3. Equivalencia entre los sistemas

En la Tabla 4 se presentan algunas equivalencias entre las unidades de los distintos sistemas detallados anteriormente.

Tabla 4. Equivalencia entre unidades de distintos sistemas

MAGNITUD	**VALOR EN UNIDADES DEL S.I.**
Longitud	
1 año luz	$9{,}46055 \times 10^{15}$ m
1 pulgada	0,0254 m
1 pie = 12 pulgadas	0,3048 m
1 yarda = 3 pies	0,9144 m
1 yarda = 3 pies	0,9144 m (exactamente)
1 milla terrestre = 1760 yardas	$1{,}609344 \times 10^3$ m (exactamente)
1 milla náutica	$1{,}852 \times 10^3$ m
Velocidad	
1 km/h	0,2778 m/.s
1 nudo = 1 milla náutica/h	1,852 km/h = 0,5144 m/s
Áreas	
1 hectárea (ha)	1×10^4 m^2
1 milla cuadrada	2,589988 km^2 = $2{,}589988 \times 10^6$ m^2
1 acre (ac)	$4{,}04686 \times 10^3$ m^2

Tabla 4. Equivalencia entre unidades de distintos sistemas (continuación)

MAGNITUD	VALOR EN UNIDADES DEL S.I.
Volumen	
1 litro (l)	1 dm^3
1 mililitro (ml)	1 cm^3
1 UK galón	4,54609 dm^3
1 US galón	3,785412 dm^3
1 pie cúbico	2,831685 x 10^{-2} m^3
1 pulgada cúbica	1,6387064 x 10^{-5} m^3 = 16,387064 cm^3
Peso	
1 tonelada métrica	1x10^3 kg
1 libra (lb)	0,45359327 kg
1 onza (oz)	2,834952 x 10^{-2} kg
Temperaturas	
Celsius a Fahrenheit:	T (ºF) = 9/5 (T ºC + 32)
Fahrenheit a Celsius:	T (ºC) = 5/9 (T ºF - 32)
Celsius a Kelvin	T (K) = T (ºC) +273
Fuerza	
1 lb fuerza	4,48 N
1 dina	10^{-5} N
1 kg fuerza	9,8 N

Por ejemplo si se deseara expresar 720 km/h en m/s se procede de la siguiente manera:

a) se escriben los factores de conversión

$$720\frac{km}{h} = 720\frac{km}{h} x \frac{1000\,m}{1km} x \frac{1\,h}{3600\,s}$$

b) se simplifican las unidades cuando sea posible

$$720\,\frac{km}{h} = \frac{720.1000}{3600}\frac{m}{s}$$

c) se realizan las operaciones indicadas

$$720\frac{km}{h} = \frac{72x10^4}{36x10^2}\frac{m}{s} = 200\frac{m}{s}$$

1.4. Análisis Dimensional

El análisis dimensional es una parte de la Física que estudia la forma como se relacionan las magnitudes derivadas con las fundamentales.

Toda unidad física, está asociada con una dimensión física, por ejemplo el segundo pertenece a la dimensión del tiempo (T), el metro es una unidad de medida de la dimensión longitud (L), el kg es una unidad de medida de la dimensión masa (M), etc. Además existen otras unidades que pueden expresarse en términos de las dimensiones fundamentales, por ejemplo la unidad de velocidad en el S.I. es m/s, que puede expresarse como combinación de las dimensiones mencionadas anteriormente, es decir:

$$\text{Dimensión de velocidad} = \frac{\text{Dimensión de longituda (L)}}{\text{Dimensión de tiempo (T)}}$$

El Análisis Dimensional se utiliza para:

- expresar (relacionar) las magnitudes derivadas en términos de las fundamentales.
- comprobar la veracidad o falsedad de las fórmulas físicas, haciendo uso del principio de homogeneidad dimensional.
- deducir nuevas fórmulas a partir de datos experimentales.

Los símbolos que se utilizan para especificar las dimensiones básicas: longitud, masa y tiempo son L, M y T respectivamente.

Comúnmente se usan corchetes [ ] para indicar las dimensiones de una magnitud y deben expresarse como productos, así para el caso anterior se tiene:

$$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

Las dimensiones pueden tratarse como cantidades algebraicas, de manera que, en el análisis dimensional:

- las cantidades sólo pueden sumarse o restarse si tienen las mismas dimensiones.
- los dos miembros de una igualdad (o ecuación) deben tener las mismas dimensiones.

Conviene remarcar que con este análisis se puede deducir o verificar una fórmula o expresión, determinar las unidades (o dimensiones) de la constante de proporcionalidad, pero no su valor numérico, por lo tanto no pueden determinarse las constantes adimensionales.

Por ejemplo, si se desea determinar si la expresión $x = \frac{1}{2}at^2$ es dimensionalmente correcta:

1. Se determinan las dimensiones de cada una de las variables:

$$[x] = L,\ [a] = L/T^2 = LT^{-2},\ [t]^2 = T^2$$

2. Se igualan las dimensiones de cada variable:

$$[x] = [a][t]^2$$

3. Se sustituyen las dimensiones de cada variable:

$$L = (LT^{-2})(T)^2.$$

4. Se opera algebraicamente con las dimensiones (agrupando las dimensiones iguales y aplicando propiedades de potencias):

$$L = L\,(T^{-2}).(T)^2 = L\,T^{(-2+2)} = LT^0 = L$$

5. Se observa si el resultado si es dimensionalmente correcto. En este caso sí lo es.

En la Tabla 5 se presentan magnitudes de uso frecuente con sus dimensiones, símbolos y unidades (en S.I.).

Tabla 5. Dimensiones, símbolos y unidades de magnitudes físicas de uso frecuente

Magnitud	Dimensión	Símbolo	Unidad
Longitud	L	x, y	m
Masa	M	m	kg
Tiempo	T	t	s
Superficie	L^2	A	m^2
Volumen	L^3	V	m^3
Velocidad	$L.T^{-1}$	v	m/s
Aceleración	$L.T^{-2}$	a	m/s^2
Fuerza	$M.L.T^{-2}$	F	$kg.m/s^2$
Trabajo	$M.L^2.T^{-2}$	J	$kg.m^2/s^2$

Trabajo Práctico Nº1
Magnitudes Físicas

Sistemas de unidades

1. Entre las alternativas, indique las unidades que no corresponden a las magnitudes fundamentales del Sistema Internacional:

a) metro (m)
b) mol (mol)
c) Amperio (A)
d) candela (cd)
e) segundo (s)
f) kilogramo (kg)
g) dina (din)

2. Marque las magnitudes que no corresponden con la unidad asignada en el S.I.
a) Cantidad de sustancia - kilogramo
b) Tiempo - segundo
c) Intensidad de corriente - candela
d) Masa - kilogramo
e) Temperatura termodinámica – kelvin
f) Intensidad luminosa- Amperio

3. Indique las unidades que no corresponden a una unidad fundamental en el S.I.
a) A – Ampere
b) mol - mol
c) C - Coulomb
d) m – metro
e) ergio - erg
f) libra - lb
g) pie – ft

4. Entre las unidades mencionadas, señale las que pertenecen a unidades base en el S.I.
a) N – Newton
b) Pa - Pascal
c) oz - onza
d) A - Amperio
e) g – gramo
f) W – watt
g) ºC – grado centígrado o Celsius

5. ¿Qué relaciones no corresponden?
a) 1 YN = 10^{24} N
b) 4 PJ = 4x 10^{15}J
c) 1 ns = 10^{-9} s
d) 3 pmol= 3x10^{-9}
e) 5 fA = 5x10^{-18} A
f) 20 μcd= 2x10^{-7} cd

6. Al convertir una señal de camino al sistema métrico, sólo se han cambiado parcialmente los datos. Se indica que una población está a 20 km de distancia, y la otra a 10 millas de distancia (1 milla = 1,61 km). ¿Cuál población está más distante y en cuántos kilómetros?

7. Los diámetros de unas tuberías necesarias en una fábrica son 2; 4 y 12 pulg. Indique los diámetros en cm y dm.

8. Realice las siguientes conversiones:

a) 520.314 m a km

b) 120 km/h a m/s

c) 145 ft a m

d) 1500 cm^3 a l

e) 8240 l/s a m^3/s

f) 4200s a min

g) 2 kW.h a J (recordar que W=N/s y J=N.m)

h) 15 $lb/pulg^3$ a g/ml

9. Complete la siguiente tabla

Cantidad	**Convertir en**	**Procedimiento** (Multiplicar / dividir por uno o varios factores de conversión)	**Respuesta** (número y unidad)
0,0220 m	cm		
0,00120 mm	nm		
450002 cm	m		
25 km	m		
4,2 mm^2	cm^2		
2,5 días	h		
2,5 días	min		
2,5 días	s		
34728 s	min		
34728 s	h		
34728 s	d		
742 cm^3	m^3		
412 dm^3	m^3		
1248 μl	cm^3		
1,033 g/cm^3	g/l		
120 g/cm^3	kg/m^3		
1,033 g/cm^3	lb/ft^3		
1,033 g/cm^3	g/dm^3		
1200 kg	tn		
8740 mg	g		
12 lb	g		
350 ft	pulg		
350 ft	m		
12 kg fuerza	N		

10. Hallar en Zm la distancia que existe desde la Tierra a una estrella, siendo esta distancia equivalente a 4 años luz. (1 año luz = distancia que recorre la luz en un año de 365 días). Considere que la luz recorre 300 000 km en 1 segundo.

11. Exprese en Gm la distancia que recorre en 2 Ts un móvil que marcha a 110 km/h

12. Las cepas de *Bacillus cereus* se reproducen en progresión geométrica a razón de 1200 bacterias por hora. Si un cultivo tenía inicialmente 24 bacterias, cuántas se tendrá en 2 h? Exprese este resultado en Tbacterias.

13. Si un mol de carbono tiene 6, 02 $x10^{23}$ átomos y pesa 12 g, ¿cuánto pesaran en ng 21,25 x 10^{13} átomos?

14. Un cuerpo tiene una masa de 2400 Gg y un volumen de 3500 km^3, encuentre su densidad en $\mu g/m^3$

Análisis dimensional

15. Siendo m una magnitud física, indique cuáles de las siguientes proposiciones se cumplen:
a) $[m]+[m]=[m]$
b) $[m].[m]=[m]^2$
c) $[m]^2/[m]=[m]$
d) $[m]-[m]=0$

16. Indique las relaciones que son dimensionalmente correctas:
a) [fuerza]= MLT^{-3}
b) [trabajo]=ML^2T^{-2}
c) [velocidad]=$L.T^1$
d) [aceleración]= LT^{-2}

17. Indique verdadero o falso
a) El análisis dimensional se utiliza para verificar fórmulas
b) El análisis dimensional se utiliza para deducir fórmulas empíricas
c) En una fórmula dimensional todos los términos de ambos miembros deben tener las mismas dimensiones
d) La ecuación dimensional de los términos del primer miembro son diferentes a las dimensiones del segundo miembro.

18. Marque las unidades que están asociadas incorrectamente a las dimensiones propuestas.
a) $\frac{kg.s}{m}=ML^{-1}T^{-1}$

b) $\frac{kg.m^2}{s^2}=ML^2T^{-2}$
c) A/s= $I.T^{-1}$

19. A partir de la ley de Gravitación Universal de Newton: $F=\frac{Gm_1m_2}{r^2}$ determinar las dimensiones de la constante de gravitación G.

20. A partir de la Ecuación General de los Gases Ideales, PV=n RT determine las dimensiones de la constante universal de los gases R.

21. Encuentre las dimensiones del período T de un péndulo de longitud l, siendo la fórmula: $T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$, donde k es una constante adimensional y g es la aceleración de la gravedad.

22. El calor específico de una sustancia está dado por la ecuación $c=a+bt^2$, donde a y b son constantes y t es la temperatura en grados centígrados. El calor necesario para aumentar la temperatura de una masa m de la sustancia desde 0 ºC hasta T ºC es:

a) $m\left(aT + b\frac{T^3}{3}\right)$ o bien b) $m\left(aT + b\frac{T^2}{4}\right)$

Magnitudes Vectoriales

Como se expresó anteriormente, si bien las magnitudes escalares tienen únicamente como variable a un número que representa una determinada cantidad, por ejemplo la masa, la presión, el volumen, la energía, la temperatura, **las magnitudes vectoriales** son aquellas que además del módulo (o valor absoluto) poseen punto de aplicación, dirección y sentido. Son ejemplos de magnitudes vectoriales el desplazamiento, la velocidad, la fuerza, el peso de un cuerpo, etc.

1. 6. Representación de magnitudes vectoriales

Las magnitudes vectoriales se representan mediante **vectores**. Un vector se representa por un segmento orientado, dibujado como una flecha, que queda caracterizado por los siguientes elementos: su longitud, intensidad o **módulo**, siempre positivo por definición; su **dirección**, determinada por la inclinación con respecto a la horizontal de la recta a la que pertenece el vector; su **sentido**, que se indica en el extremo del mismo con una flecha y punto de aplicación (ver Figura 1.2).

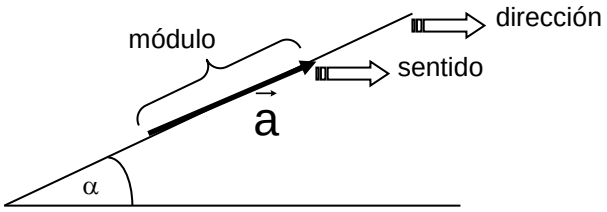


Figura 1.2. Elementos de un vector

La representación simbólica es por ejemplo $\vec{a}$ y se lee vector a y para la gráfica se debe adoptar una escala de representación.

Si se tiene una gráfica a escala y se desea conocer el módulo del vector, se debe medir el vector con una regla y multiplicar este valor con su correspondiente unidad por la escala de representación.

Por ejemplo, si se desea conocer el módulo de un vector fuerza, cuya representación gráfica mide 6 cm y la escala corresponde a 2 N/cm, del módulo del vector fuerza es igual a:

$$6\ \text{cm} \,.\, 2\frac{\text{N}}{\text{cm}} = 12\ \text{N}$$

El módulo de un vector se indica con las barras de valor absoluto, es decir:

$|\vec{a}|$ y se lee módulo del vector a.

1.6.1. Tipos de vectores

A continuación se presentan algunos tipos de vectores.

Vectores colineales

Son aquellos vectores que poseen la misma dirección (una misma línea de acción) (Fig. 1.3).

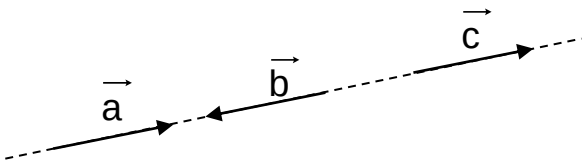


Figura 1.3. Vectores colineales

Vectores concurrentes

Son aquellos vectores cuyas líneas de acción, se cortan en un solo punto (Fig. 1.4).

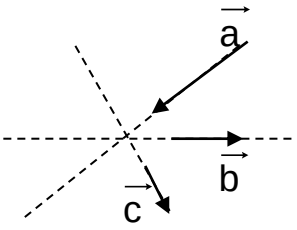


Figura 1.4. Vectores concurrentes

Vectores iguales

Son aquellos vectores que tienen la misma intensidad o módulo, dirección y sentido.

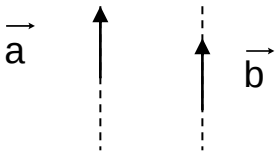


Figura 1.5. Vectores iguales

Vectores coplanares

Se encuentran en un mismo plano (ver Figura 1.6)

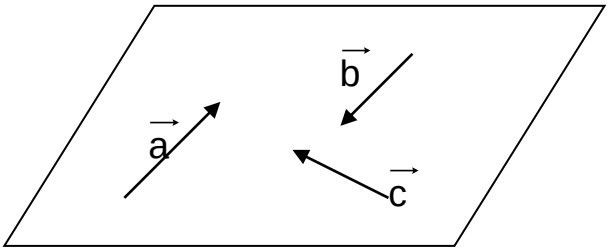


Figura 1.6. Vectores coplanares

1.6.2. Formas de expresión de vectores

Los vectores pueden expresarse en tres formas: cartesiana, polar y mediante vectores unitarios.

1.6.2.1. Expresión en forma cartesiana

La forma cartesiana de un vector resulta al realizar la descomposición del mismo en sus componentes cartesianas o rectangulares, es decir las componentes del mismo en el eje x y en el eje y. Para ello se sigue una serie de pasos, por ejemplo si se desea realizar la descomposición cartesiana del $\vec{a}$ (ver Figura 1.7):

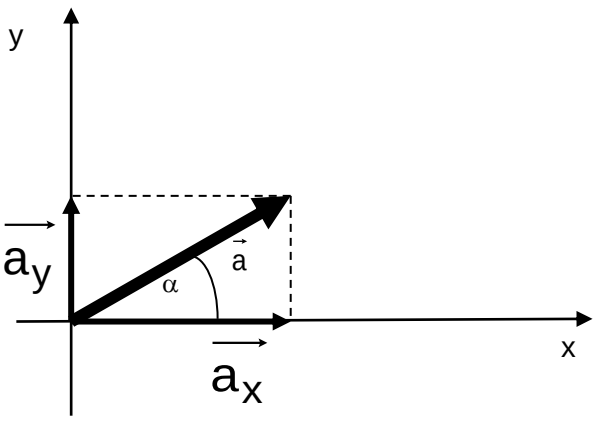


Figura 1.7. Descomposición cartesiana de un vector

Los pasos son:

1. el origen del vector $\vec{a}$ se debe hacer coincidir con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas u ortogonales (con ejes x y y), puede observarse que el vector forma un ángulo α con el eje x

2. se realizan las proyecciones perpendiculares del vector $\vec{a}$, es decir las proyecciones del vector sobre el eje x y sobre el eje y que se denotan como $\vec{a}_x$ y $\vec{a}_y$.

3. se calcula el módulo de estas componentes aplicando trigonometría, es decir:

$$\left|\vec{a}_x\right| = \left|\vec{a}\right|.\cos\alpha \text{ y } \left|\vec{a}_y\right| = \left|\vec{a}\right|.\text{sen}\,\alpha$$

Las componentes resultantes de la descomposición del vector pueden utilizarse para especificar el vector, $\vec{a}$=(a_x,a_y), siendo a_x y a_y los módulos de la componente horizontal y vertical del vector, respectivamente. El módulo del vector se define como: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{a_x}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a_y}\right|^2}$

Expresión en forma polar

Si se conocen las componentes cartesianas del vector, se puede conocer la expresión del vector a en forma polar. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. El módulo de $\vec{a}$ se calcula mediante el Teorema de Pitágoras puesto que el módulo de $\vec{a}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo de cateto adyacente al ángulo α, a_x, y cateto opuesto a dicho ángulo, a_y (Figura 1.7.). Entonces:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{a_x}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a_y}\right|^2}$$

2. La dirección del vector queda determinada por el ángulo α, que se puede calcular como sigue:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\left|a_y\right|}{\left|a_x\right|} \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\frac{\left|a_y\right|}{\left|a_x\right|}$$

Entonces un vector en forma polar se expresa como: $\vec{a} = (|a|, \alpha)$ o bien $(|a| / \alpha)$

1.6.2.2. Expresión con versores

Se define a un versor o vector unitario como un vector que tiene por módulo a la unidad y su única finalidad es describir una dirección en el espacio.

Un vector se descompone según sus componentes en los ejes x, y y z, el versor del eje x se denota como $\vec{i}$ y en coordenadas cartesianas es $\vec{i}$ =(1,0,0), el versor del eje y es $\vec{j}$ =(0,1,0) y $\vec{k}$ =(0,0,1) es el versor del eje z. Ver Figura 1.8.

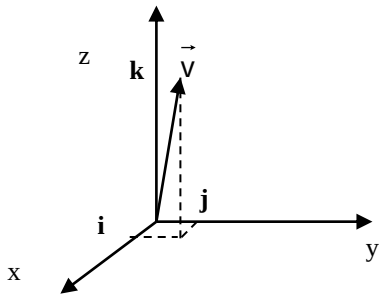


Figura 1.8. Descomposición de un vector en función de los versores

El vector $\vec{v}$ de la figura se puede expresar como: $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

1.6.3. Operaciones con vectores

1.6.3.1. Suma de vectores

Sumar dos o más vectores, consiste en representarlos por uno sólo llamado resultante. Este vector resultante produce el mismo efecto que todos los vectores juntos.

Se debe tener en cuenta que **la suma vectorial no es lo mismo que la suma aritmética**.

La suma de vectores se puede resolver por métodos gráficos y por métodos analíticos.

1.6.3.1.1. Métodos gráficos

Dentro de los métodos gráficos se distinguen el método del paralelogramo, el del triángulo y el del polígono.

Método del Triángulo

Se aplica exclusivamente en el caso de **dos vectores concurrentes y coplanares**.

Para aplicar este método se unen los dos vectores, uno a continuación del otro, de manera que formen un triángulo, el vector resultante $\vec{R}$ se encontrará en la línea que se agregó para formar el triángulo y su punto de aplicación coincide con el origen del primer vector. Observar la Fig. 9.

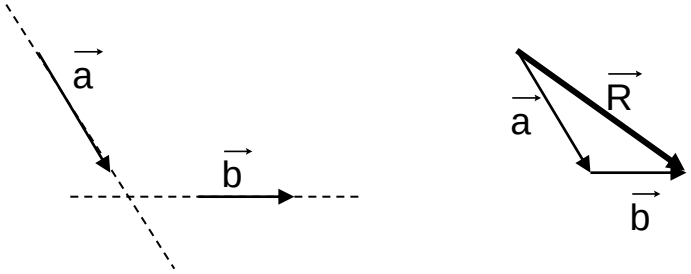


Figura 9. Suma de vectores por el método del triángulo

Método del Paralelogramo

Se aplica tanto para dos vectores como para la adición de cualquier número de vectores.

Si se considera el caso de **dos vectores coplanares**, para encontrar la resultante se unen vectores por el origen de los mismos de manera de formar un paralelogramo. El vector resultante se encuentra en la diagonal principal del paralelogramo, su origen coincide con el origen de los vectores. (Observar la Fig. 1.10)

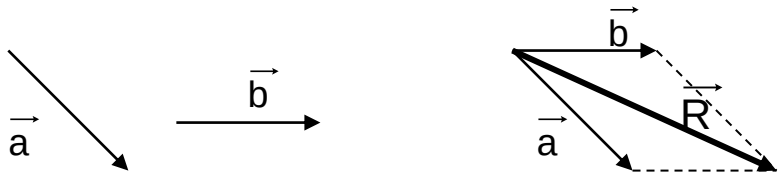


Figura 1.10. Suma de vectores por el método del paralelogramo

Para sumar más de dos vectores, se aplica el método a los dos primeros y se obtiene una resultante, luego se repite la aplicación del método a la resultante y al tercer vector y así sucesivamente.

Método del Polígono o de la poligonal

Este método se aplica en al caso de **dos o más vectores coplanares**. El método consiste en unir los vectores uno a continuación de otro, a continuación se une el origen del primer vector con el extremo del último de manera de obtener así el vector resultante o vector suma. (Observar la Fig. 1.11)

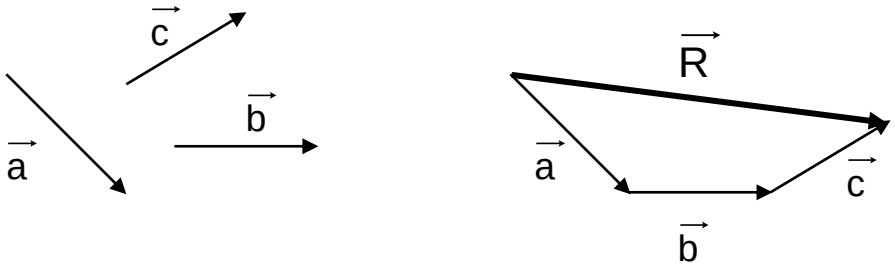


Figura 1.11. Suma de vectores por el método del polígono

1.6.3.1.2. Método analítico

Si se tiene que realizar la suma de vectores colineales, la resultante surge de la suma algebraica de los módulos de los vectores considerando si es positivo o negativo de acuerdo con el sistema de referencia (ejes coordenados cartesianos).

Si los vectores son coplanares, éstos se descomponen en un sistema de coordenadas cartesianas, de manera que cada componente de la resultante se obtiene sumando algebraicamente las componentes de cada vector. A partir de esas componentes se encuentra el módulo y la dirección del vector suma.

Por ejemplo, si se desea sumar dos vectores aplicando el método analítico, siendo $\vec{a}$ = (3/45°) y $\vec{b}$ = (4/0°):

a) Se descomponen estos vectores en sus componentes cartesianas (es decir los módulos de cada componente)

$$a_x = |a|\cos\alpha = 3 \cdot \cos 45° = 3 \cdot 0{,}7071 = 2{,}1213 \cong 2{,}1$$
$$a_y = |a|\operatorname{sen}\alpha = 3 \cdot \operatorname{sen} 45° = 3 \cdot 0{,}7071 = 2{,}1213 \cong 2{,}1$$

$$b_x = |b|\cos\beta = 4 \cdot \cos 0° = 4$$
$$b_y = |b|\operatorname{sen}\beta = 4 \cdot \operatorname{sen} 0° = 0$$

b) Las componentes cartesianas de la resultante son:

$$r_x = a_x + b_x = 2{,}1 + 4 = 6{,}1$$
$$r_y = a_y + b_y = 2{,}1 + 0 = 2{,}1$$

La resultante es $\vec{R} = (6{,}1;2{,}1)$

c) Se calcula el módulo y la dirección del vector resultante:

$$|R| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(6{,}1)^2 + (2{,}1)^2} = 6{,}4513 \cong 6{,}4$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r_y}{r_x} = \frac{2{,}1}{6{,}1} = 0{,}3442 \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} 0{,}3442 = 18{,}99^\circ \cong 19^\circ$$

Se puede expresar como $\vec{R}$ = (6,4/19°), observar la Fig. 1. 12.

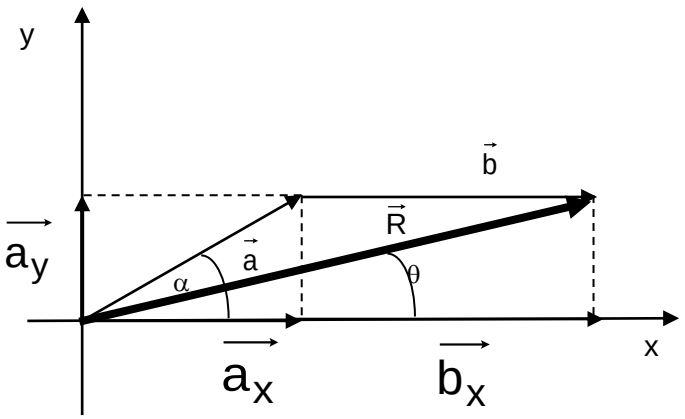


Figura 1.12. Suma de vectores por el método analítico

Si los vectores a sumar están expresados con sus vectores unitarios, se debe realizar la suma componente a componente. Por ejemplo si se desean sumar los vectores $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ y $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, la suma es:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

Considerando el ejemplo anterior, la expresión de los vectores con sus versores es:

$$\vec{a} = 2{,}1\vec{i} + 2{,}1\vec{j} \text{ y } \vec{b} = 4\vec{i}$$

Por lo tanto su suma es: $\vec{a} + \vec{b} = (2{,}1 + 4)\,\vec{i} + (2{,}1 + 0)\vec{j} = 6{,}1\vec{i} + 2{,}1\,\vec{j}$

1.6.3.2. Diferencia de vectores

Si se aplica el método analítico se debe considerar el signo de las componentes del vector con respecto al sistema de ejes cartesianos.

Si se considera el método gráfico se puede aplicar el método del triángulo o bien el del paralelogramo.

Si los vectores a restar están expresados con sus vectores unitarios, se debe realizar la diferencia componente a componente.

Método del Triángulo

Para aplicar este método, en la diferencia de vectores, se unen los dos vectores por el origen y luego se unen los extremos. En la Fig. 1.13 se indica la diferencia $\vec{a} - \vec{b}$

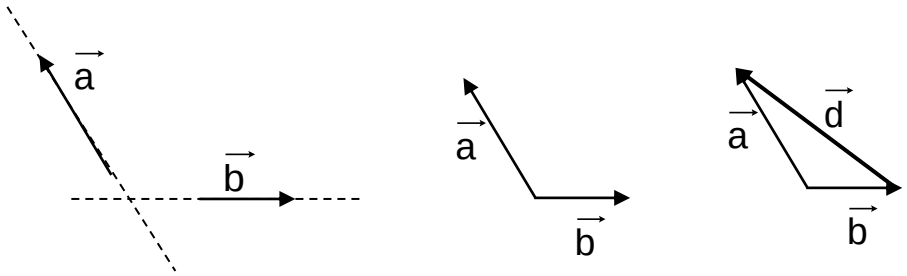


Figura 1.13. Diferencia de vectores por el método del triángulo

Método del Paralelogramo

Para realizar la diferencia $\vec{a} - \vec{b}$ aplicando este método se invierte el sentido del vector sustraendo (con signo negativo); y se sigue el mismo procedimiento para la suma de vectores por el método del paralelogramo (ver Fig. 1.14).

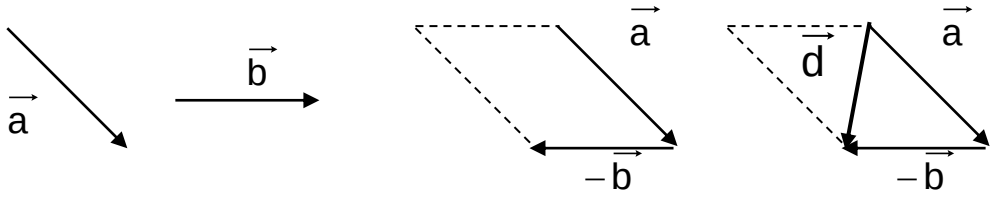


Figura 1.14. Diferencia de vectores por el método del paralelogramo

1.6.3.3. Producto de un vector por un escalar

El producto de un vector por un escalar tiene como resultado a otro vector que posee la misma dirección que el vector original pero su módulo es el producto del módulo del vector por el escalar.

Por ejemplo, sea $\vec{a} = (3/45^\circ)$, si se multiplica por el escalar (número real) 2, el resultado es $\vec{a} = (6/45^\circ)$, si el vector estuviera expresado en forma cartesiana, por ejemplo $\vec{b} = (2,3)$ y se debe realizar una multiplicación por el escalar 5, se multiplican cada una de las componentes por dicho escalar, entonces 5. $\vec{b} = (10,15)$

1.6.4. Producto ESCALAR de vectores

El producto escalar o interior de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denota como $\vec{u} \bullet \vec{v}$, por ello también se denomina producto punto y es igual a:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \left|\vec{v}\right| \cos\alpha$$

Siendo α el ángulo comprendido entre ambos vectores.

El producto escalar de dos vectores expresados en forma cartesiana, por ejemplo, $\vec{u}=(u_x,u_y)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y)$ es igual a:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (u_x,u_y) \bullet (v_x,v_y) = u_x .v_x + u_y .v_y$$

Como se ve, el resultado del producto escalar de dos vectores es un **número real.**

Si se conoce el valor del producto interior de dos vectores expresados en forma cartesiana, se puede calcular el ángulo comprendido entre ellos

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \left|\vec{v}\right|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \left|\vec{v}\right|}\right)$$

Si se desea realizar el producto interior de $\vec{u}=(2,4)$ y $\vec{v}=(0,-1)$ y calcular el ángulo comprendido, el producto es:

$\vec{u} \bullet \vec{v} = (2,4).(0,-1) = (2.0) + (4.(-1)) = -4$

Para calcular el ángulo comprendido se necesita conocer el módulo de los vectores que es:

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}; \quad \left|\vec{v}\right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

Con esto se calcula:

$$\cos\alpha = \frac{u.v}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|} = \frac{-4}{\sqrt{20}.1} = -0,894 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0,894) = 153,43^\circ$$

Si los vectores tuvieran tres componentes, por ejemplo sea $\vec{a} = a_X\vec{i} + a_Y\vec{j} + a_Z\vec{k}$

Y $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, se debe considerar que este producto es distributivo y que

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1.1.\cos 0^\circ = 1$$

$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 1.1.\cos 90^\circ = 0$$

Por lo tanto:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \bullet \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$

$$= (a_x.b_x) + (a_y.b_y) + (a_z.b_z)$$

- ✓ El producto escalar ES CONMUTATIVO.

1.6.5. Producto VECTORIAL de vectores

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se denota como $\vec{a}$ x $\vec{b}$, por ello también se denomina producto cruz, es igual a otro **vector** cuya **dirección** es **perpendicular** a los dos vectores y su **sentido** sería igual al avance de un **sacacorchos** al girar de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (ver Fig.1.15). Su **módulo** es igual a:

$$\left|\vec{a}x\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \operatorname{sen}\varphi$$

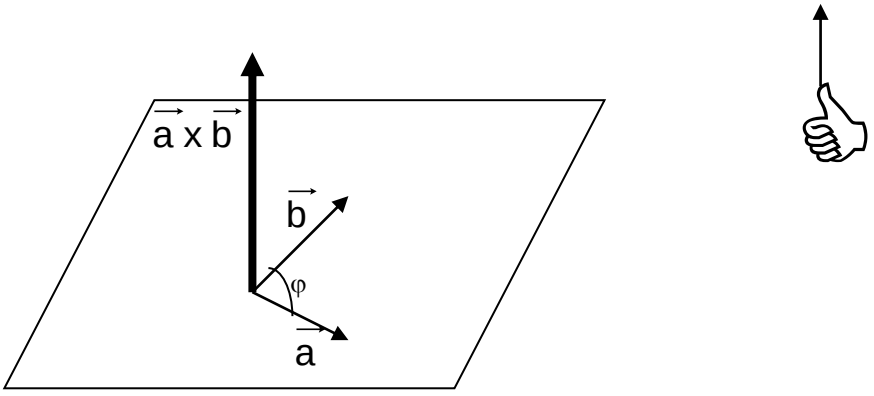


Figura 1.15. Esquema del producto vectorial de dos vectores

Regla de la mano derecha: imaginar un eje perpendicular al plano de los vectores, doblar alrededor de ese eje los dedos de la mano derecha, empujar el vector $\vec{a}$ a hacia el $\vec{b}$ manteniendo el pulgar extendido, este da la dirección del producto vectorial.

El producto vectorial de los vectores $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ y $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, se puede calcular aplicando la definición que indica que:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

ó bien aplicando determinantes:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \right)$$

- ✓ El producto vectorial NO ES CONMUTATIVO.
- ✓ El producto vectorial de dos vectores paralelos es igual a 0 (recordar que en este caso $\varphi = 0°$ o $180°$ y sen $\varphi = 0$)

Trabajo Práctico N°2
Magnitudes Físicas

Magnitudes vectoriales

1. Represente a escala los siguientes vectores:

a) (4/35°)
b) (6/45°)
c) (2/50°)
d) (3/70°)
e) (8/0°)
f) (1/60°)

2. Dada la longitud de la representación gráfica del vector y las escalas siguientes indique el módulo del vector:

a) L= 3 cm, escala: 1cm: 3 m/s
b) L= 4 cm, escala: 1cm: 10 km/h
c) L= 7 cm, escala: 1cm: 9 N
d) L= 14 cm, escala: 1cm:4 N

3. Indique la expresión cartesiana de los siguientes vectores, represente gráficamente en ejes coordenados cartesianos:

a) (10/25°)
b) (4/35°)
c) (6/45°)
d) (2/50°)
e) (21/60°)
f) (3/70°)
g) (16/90°)
h) (8/0°)
i) (21/135°)
j) (1/180°)
k) (4/220°)
l) (6/270°)
m) (5/360°)
n) (7/345°)

4. Encuentre la expresión en forma polar de los siguientes vectores y represente gráficamente en ejes coordenados cartesianos:

a) (2,2)
b) (-1, $\sqrt{3}$)
c) (1,-1)
d) (-3,0)
e) (0,-4)
f) (0,16)
g) (3,9)
h) (4,6)
i) (-1,0)
j) (0,-1)
k) (12,4)
l) (3,6)
m) (5,15)

n) (2,-4)

5. Dados los siguientes vectores expresado en forma cartesiana, expréselos utilizando versores.

a) (1,3,4)
b) (2,4,8)
c) (-1,-3,4)
d) (1,-1,-3)
e) (3,3,3)
f) (4,1,-1)
g) (0,3,6)
h) (1,3,-3)

6. Aplicando los métodos del paralelogramo, del triángulo y del polígono, calcule la suma de los siguientes vectores:

a) $\vec{a} = (3/45^\circ)$ y $\vec{b} = (2/15^\circ)$
b) $\vec{a} = (4/25^\circ)$ y $\vec{b} = (2/90^\circ)$
c) $\vec{a} = (3/60^\circ)$ y $\vec{b} = (2/135^\circ)$
d) $\vec{a} = (1/45^\circ)$ y $\vec{b} = (2/180^\circ)$
f) $\vec{a} = (5/30^\circ)$ y $\vec{b} = (2/135^\circ)$
g) $\vec{a} = (10/25^\circ)$ y $\vec{b} = (20/150^\circ)$
h) $\vec{a} = (1/30^\circ)$ y $\vec{b} = (2/230^\circ)$

7. Aplicando el método del polígono encuentre la resultante de la suma de los siguientes vectores:

a) $\vec{a} = (3/45^\circ)$, $\vec{b} = (2/15^\circ)$ y $\vec{c} = (1/0^\circ)$
b) $\vec{a} = (3/45^\circ)$, $\vec{b} = (2/15^\circ)$ y $\vec{c} = (1/25^\circ)$
c) $\vec{a} = (3/60^\circ)$, $\vec{b} = (2/135^\circ)$ y $\vec{c} = (2/90^\circ)$
d) $\vec{a} = (5/30^\circ)$, $\vec{b} = (2/90^\circ)$ y $\vec{c} = (4/60^\circ)$
e) $\vec{a} = (3/25^\circ)$, $\vec{b} = (4/45^\circ)$ y $\vec{c} = (5/75^\circ)$
f) $\vec{a} = (4/180^\circ)$, $\vec{b} = (2/270^\circ)$ y $\vec{c} = (1/0^\circ)$
g) $\vec{a} = (6/120^\circ)$, $\vec{b} = (10/45^\circ)$ y $\vec{c} = (12/150^\circ)$
h) $\vec{a} = (2/45^\circ)$, $\vec{b} = (2/270^\circ)$ y $\vec{c} = (1/130^\circ)$

8. Determine el vector resultante de la diferencia de los siguientes vectores:

a) $\vec{a} = (3/45^\circ)$ y $\vec{b} = (2/15^\circ)$
b) $\vec{a} = (4/25^\circ)$ y $\vec{b} = (2/90^\circ)$
c) $\vec{a} = (3/60^\circ)$ y $\vec{b} = (2/135^\circ)$
d) $\vec{a} = (5/30^\circ)$ y $\vec{b} = (2/135^\circ)$
f) $\vec{a} = (30/25^\circ)$ y $\vec{b} = (20/150^\circ)$
g) $\vec{a} = (4/30^\circ)$ y $\vec{b} = (2/230^\circ)$
h) $\vec{a} = (14/30^\circ)$ y $\vec{b} = (7/60^\circ)$

9. Realice las operaciones i) $\vec{a} + \vec{b}$; ii) $\vec{a} - \vec{b}$ y iii) $\vec{b} - \vec{a}$ con los vectores dados:

a) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ $\vec{b} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

b) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}$ $\vec{b} = 10\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$

c) $\vec{a} = 1\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$ $\vec{b} = -1\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}$

d) $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ $\vec{b} = 14\vec{i} - 2\vec{j} - 14\vec{k}$

e) $\vec{a} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 9\vec{k}$ $\vec{b} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

f) $\vec{a} = 14\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ $\vec{b} = -11\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$

10. Determine el vector resultante del producto de los siguientes vectores por los escalares:
i) ½; ii) 4; iii) -3

a) 10/25°)
b) (4/35°)
c) (6/45°)
d) (2/50°)
e) (21/60°)
f) (3/70°)
g) (16/90°)
h) (8/0°)
i) (21/135°)
j) (1/180°)
k) (4/220°)
l) (6/270°)
m) (5/360°)
n) (7/345°)

11. Calcule el producto escalar $\vec{u} \bullet \vec{v}$ y el ángulo comprendido entre estos vectores:

a) $\vec{u} = (2,3), \vec{v} = (5,-7)$
b) $\vec{u} = (-6,-2), \vec{v} = (4,0)$
c) $\vec{u} = (1,-5,4), \vec{v} = (3,3,3)$
d) $\vec{u} = (-2,2,3), \vec{v} = (1,7,-4)$
e) $\vec{u} = (2,2), \vec{v} = (0,-7)$
f) $\vec{u} = (2,8), \vec{v} = (5,0)$

12. Calcule el producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ si:

a) $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 9$ y el cos α =30°

b) $|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 8$ y el cos α =60°

c) $|\vec{a}| = 5$ y $|\vec{b}| = 5$ y el cos α =135°

d) $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 5$ y el cos α =90°

e) $|\vec{a}| = 10$ y $|\vec{b}| = 14{,}5$ y el cos α =225°

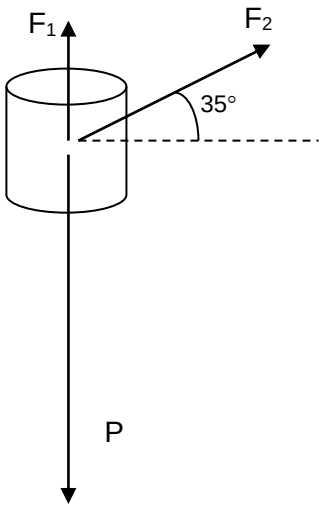
f) $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 9$ y el cos α =390°

13. Sean $\vec{u} = (3,2,-1), \vec{v} = (0,2,-3)$ y $\vec{w} = (2,6,7)$, calcule:

a) $\vec{v} \times \vec{w}$ b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$

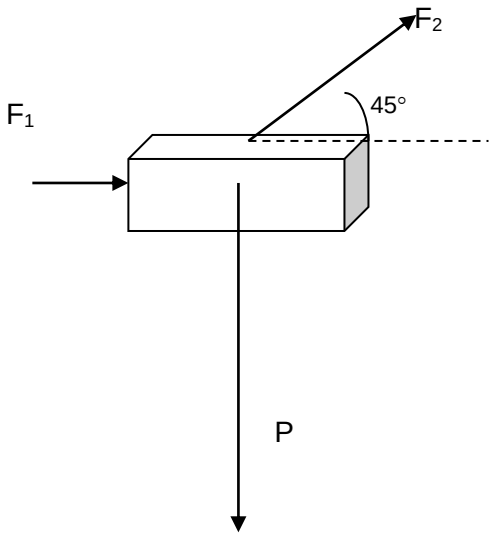
14. Un auto recorre 12 km hacia el Norte y después 25 km en una dirección 60º al Oeste del Norte. Determine magnitud y dirección del desplazamiento resultante del auto.

15. Si sobre un cuerpo actúan las siguientes fuerzas: F_1=4 N; F_2= 10 N y el peso P= 25 N, determine las componentes de la fuerza resultante, obtenga el módulo y la dirección de la misma con respecto al eje x.



16. Si un automóvil se desplaza 120 km al Norte y luego 300 km al Oeste, cual es el desplazamiento resultante?

17. Si sobre un cuerpo actúan las siguientes fuerzas: F_1=4 N; F_2= 15 N y el peso P= 50 N, determine las componentes de la fuerza resultante, obtenga el módulo y la dirección de la misma con respecto al eje x.



18. Un ómnibus parte desde el kilómetro 0 en Buenos Aires y recorre 300 km hasta Rosario, luego continúa al Este 250 km, indique el camino recorrido por el ómnibus y el desplazamiento resultante.

UNIDAD 2

CINEMATICA

CINEMATICA

La Mecánica es una rama de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos.

Cinemática es una parte de la Mecánica que se encarga de estudiar el movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que lo producen.

2.1 Conceptos básicos

❋ Partícula

Un cuerpo puede considerarse como partícula o punto material cuando pueden despreciarse sus dimensiones geométricas y no hay interés en su estructura interna comparadas con el fenómeno estudiado. Por ejemplo si un ómnibus que mide 15 m se desplaza 1 cuadra no pude considerarse como una partícula, sin embargo si este ómnibus se desplaza de Santiago del Estero a Las Termas, sí puede considerarse una partícula.

❋ Posición

La posición de una partícula puede decirse que es el punto del espacio que ocupa esa partícula con respecto a un sistema de referencia. De manera que dado un sistema de coordenadas, a cada posición de la partícula le corresponde una única coordenada. Por ejemplo en la Figura 2.1 se indican dos posiciones diferentes de una partícula en un sistema de referencia de coordenadas cartesianas.

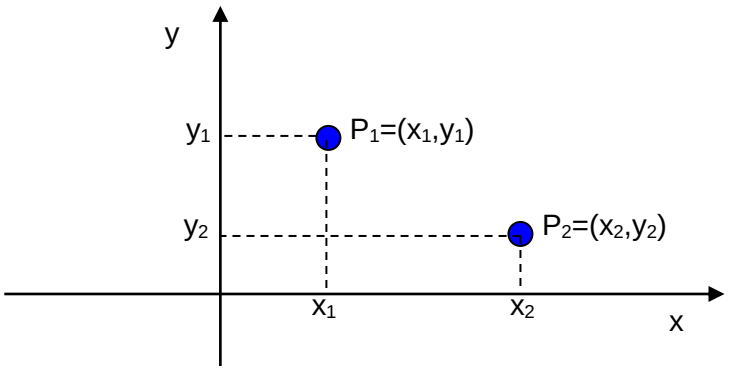


Figura 2.1. Diferentes posiciones de una partícula

La **posición** de una partícula se puede representar como un **vector**, $\vec{r}$, cuyo origen coincide con el origen del sistema de coordenadas y cuyo punto final está en el punto correspondiente a su posición. En la Figura 2.2. se presentan los vectores que representan a las posiciones de la figura anterior.

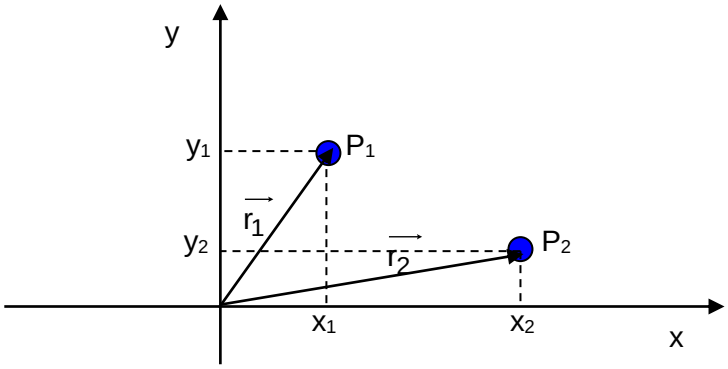


Figura 2.2. Representación vectorial de dos posiciones de una partícula

❋ Desplazamiento

Desplazamiento es la diferencia entre dos vectores posición de la partícula, es la diferencia entre el vector posición inicial y el vector posición final. En la Figura 2.3 se muestra el desplazamiento entre las posiciones P_1 y P_2: Como puede observarse el desplazamiento es un vector trazado desde la posición inicial hasta la posición final.

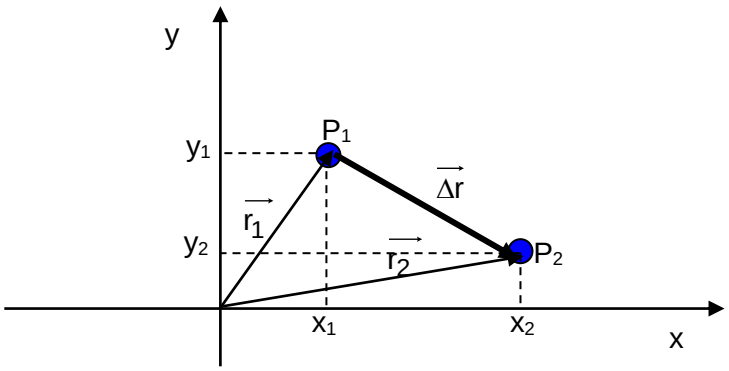


Figura 2.3. Desplazamiento de una partícula de la posición 1 a la 2

❋ Movimiento

Puede definirse al movimiento como el fenómeno físico que consiste en el cambio de posición que realiza un cuerpo (móvil) en cada instante con respecto a un sistema de referencia, el cual se considera fijo.

UN CUERPO ESTÁ EN MOVIMIENTO SI SU POSICIÓN CAMBIA CON EL TIEMPO, respecto a un punto o sistema de referencia.

❋ Trayectoria

Es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento. Es la línea que describe la partícula en su movimiento. En la Figura 2.4 se presentan ejemplos de trayectorias de una partícula.

Figura 2.4. Ejemplos de trayectorias de una partícula

La longitud de la misma se denomina longitud recorrida Δx.

❋ Intervalo de Tiempo

El intervalo de tiempo es el tiempo en el que se desarrolla un fenómeno o acontecimiento, es la diferencia entre el tiempo final y el inicial. Se denota como ($\Delta t = t_f - t_i$) o bien ($\Delta t = t_2 - t_1$), etc.

Movimiento Rectilíneo

Se denomina **movimiento rectilíneo** a aquel cuya trayectoria es una línea recta.

A continuación se considerarán distintos conceptos vinculados a este tipo de movimiento.

2.2. Posición

Considerando el caso de una partícula que se mueve en línea recta, desde el punto 0 al punto P, su posición, en el instante t, queda determinada por el vector $\overrightarrow{x_1}$ (considerando que el sistema de referencia tiene origen en 0 y el eje x coincide con la dirección del movimiento) cuyo origen es el punto 0 y su extremo el punto P de coordenada x_1, como se muestra en la Figura 2.5.

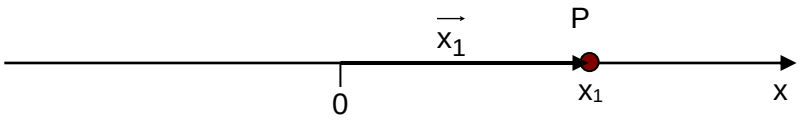


Figura 2.5. Posición de una partícula en un instante de tiempo

En el sistema de referencia de la Fig. 2.5 se observa que arbitrariamente se tomó como positivo el sentido del desplazamiento de la partícula. Como se indicó en el apartado 1.6 del capítulo anterior, se debe elegir una escala para representar adecuadamente el vector.

Si la partícula se desplazara en sentido contrario al que se eligió como positivo, su posición será negativa.

Si la partícula está en reposo la coordenada del punto P no varía, si la partícula se mueve con respecto al origen, la coordenada cambia.

2.3. Desplazamiento

Suponiendo que en el tiempo t_1, la partícula se encuentra en posición x_1, y más tarde en el tiempo t_2, la partícula se encuentra en la posición x_2 (Fig. 2.6). Puede afirmarse que la partícula se ha desplazado (ha variado su posición con el tiempo), ese desplazamiento se denota con $\overrightarrow{\Delta x} = (\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1})$, el mismo se produjo en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

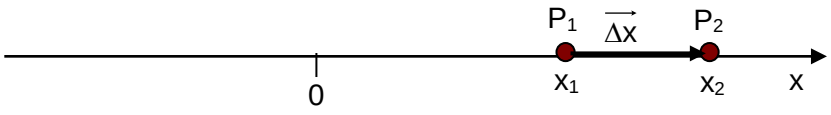


Figura 2.6. Posición de una partícula en dos instantes de tiempo

El desplazamiento Δx como se indicó anteriormente es un vector cuyo origen coincide con la posición de la partícula en el primer instante de tiempo y su extremo se encuentra en el punto que ocupa la partícula en el tiempo final. Por ello el desplazamiento no es una medida del camino recorri-

do, por ejemplo si la partícula se mueve a las posiciones x_1, x_2, x_3 y x_4 y regresa en el tiempo final a la posición x_3, el $\Delta x = x_3 - x_1$.

Por ejemplo, si el vector $\overrightarrow{x_1}$=3 m y $\overrightarrow{x_2}$ = 5 m, entonces el desplazamiento es $\overrightarrow{\Delta x} = (5-3)\text{m} = 2\text{ m}$

El desplazamiento indica el cambio neto de posición en el intervalo de tiempo considerado.

2.4. Camino recorrido

Al desplazarse, la partícula describe una trayectoria, la longitud de la misma se denomina camino recorrido o longitud de la trayectoria L, que es una **magnitud escalar**.

Por ejemplo, si las posiciones de la partícula son $\overrightarrow{x_1}$=3 m, $\overrightarrow{x_2}$ = 5 m, $\overrightarrow{x_3}$ = 9 m (con puntos de coordenadas P_1= 3m, P_2=5 m y P_3= 9 m) y luego retorna a la posición $\overrightarrow{x_1}$ entonces la longitud del camino recorrido es: $L = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1 = [(5-3) + (9-5) + (9-3)]$ m =(2 + 4 + 6) m= 12 m

2.5. Velocidad

La velocidad es una magnitud vectorial cuyo módulo indica cual es el espacio recorrido por una partícula en cada unidad de tiempo. Físicamente, el módulo o valor de la velocidad indica la rapidez con la cual se mueve un cuerpo, se denota con $\overrightarrow{v}$.

La **velocidad media** entre los instantes t_1 y t_2 está definida por la siguiente fórmula:

$$\overrightarrow{v_{m\,12}} = \frac{\overrightarrow{\Delta x_{12}}}{\Delta t_{12}} = \frac{\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}}{t_2 - t_1}$$

La interpretación geométrica de esta definición es la siguiente:

Si una partícula se mueve en línea recta, su posición es una función del tiempo, es decir $\overrightarrow{x}$ =f(t). Por lo tanto para cada instante de tiempo existe un valor determinado de posición. Si se grafica esta función se obtiene una curva como la representada en la Fig. 2.7.

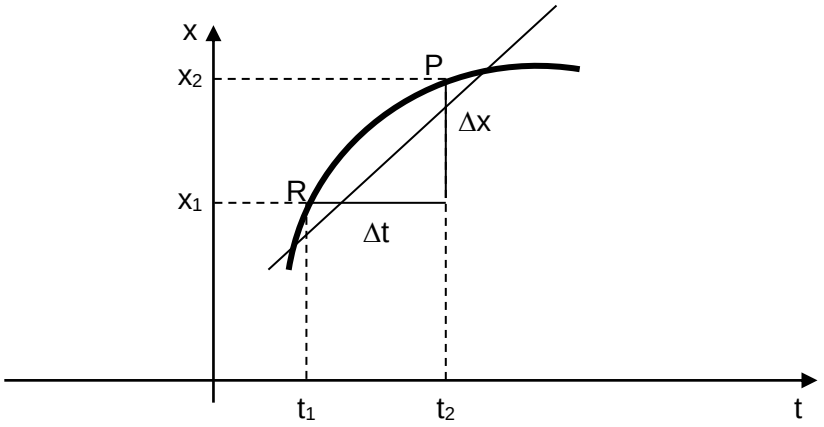


Figura 2.7. Interpretación geométrica de la velocidad media

La velocidad media $\overrightarrow{v_{m\,12}}$ en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ es la pendiente de la recta secante a la curva $\overrightarrow{x}$ =f(t), en los puntos R y P. De la gráfica esa pendiente es: $\frac{\overrightarrow{\Delta x_{12}}}{\Delta t_{12}} = \frac{\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}}{t_2 - t_1}$

Cuanto mayor es la pendiente mayor es el módulo de la velocidad media.

La ecuación dimensional para la velocidad es: $v = LT^{-1}$, su unidad en el S. I es m/s.

Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

Una partícula posee movimiento rectilíneo uniforme si cumple las siguientes condiciones:

1. La trayectoria que recorre es una línea recta.
2. La velocidad (v) es constante (por lo tanto la aceleración es igual a cero)

Que la velocidad sea constante implica que el desplazamiento es proporcional al tiempo

En esta clase de movimiento, *la partícula recorre distancias iguales en tiempos iguales.*

En la Figura 2.9 se representa v= v(t):

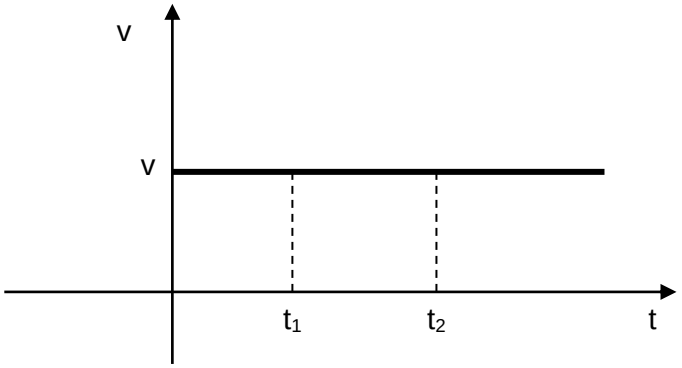


Figura 2.9. Representación de velocidad vs. tiempo para una partícula que se desplaza con Movimiento Rectilíneo Uniforme

Como se observa en la figura anterior, $\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{cons tan te}$, el signo de la velocidad (recordar que es una magnitud vectorial) coincide con el del desplazamiento puesto *que el tiempo es siempre positivo.*

Si $\vec{\Delta x} > 0, \vec{v} > 0$, el movimiento es de avance, la partícula se desplaza en el sentido positivo del eje de referencia.

Si $\vec{\Delta x} < 0, \vec{v} < 0$, el movimiento es de retroceso, la partícula se desplaza en el sentido negativo del eje de referencia.

El gráfico de la posición en función del tiempo es una recta de pendiente constante, negativa o positiva de acuerdo con el sentido del movimiento (Ver ejemplo en la Figura 2.10).

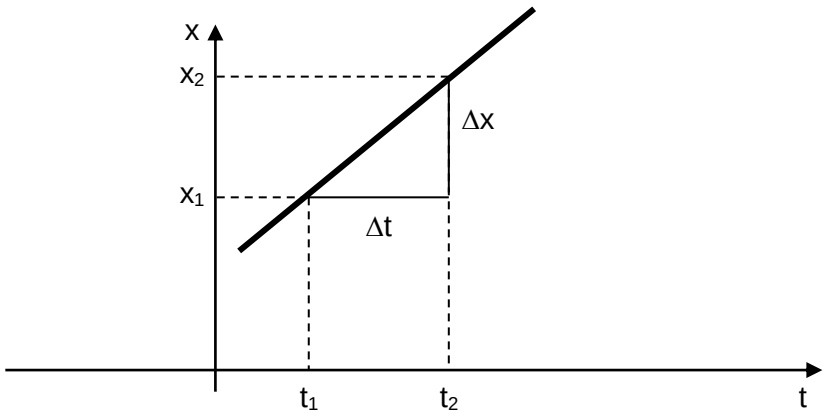


Figura 2.10. Representación de posición vs. tiempo para una partícula que se desplaza con Movimiento Rectilíneo Uniforme

De la ecuación $\vec{v} = \frac{\vec{\Delta x}}{\Delta t} = \text{cons tan te}$, se puede despejar el desplazamiento (para simplificar la notación se escribe v en lugar de $\vec{v}$, lo mismo para el desplazamiento, pero recordando siempre que son magnitudes vectoriales. Considerando además que el tiempo inicial se denota con t_0 y la posición inicial con x_0.

$$\vec{\Delta x} = \vec{v}\,\Delta t$$

$$x_1 - x_0 = v.(t - t_0) \Rightarrow x = x_0 + v.(t - t_0)$$

$x = x_0 + v.(t - t_0)$ es la ecuación de la posición en función del tiempo para el MRU.

Como puede verse esta ecuación indica que la posición es una función de primer grado del tiempo.

Puede suceder que t_0=0, entonces:

$$x = x_0 + v.t$$

Si x_0=0, la ecuación queda reducida a:

x = v.t (su representación es una recta que pasa por el origen de coordenadas).

A partir de la ecuación $\vec{\Delta x} = \vec{v}\,\Delta t$, se ve que el desplazamiento es igual al producto de la velocidad (que es una constante) por el intervalo de tiempo, es decir el área sombreada en la Fig. 2.11.

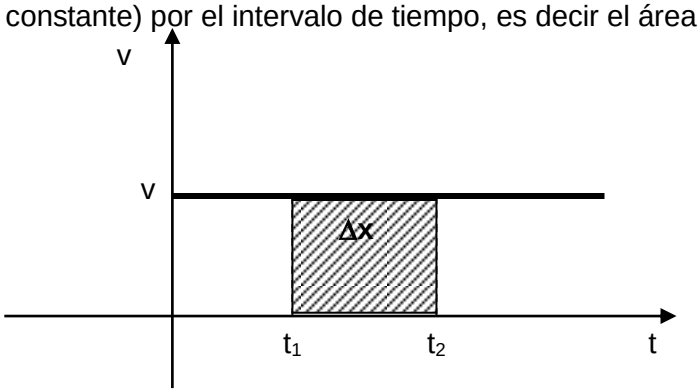


Figura 2.11. Área encerrada por la curva del el gráfico velocidad vs. tiempo para una partícula que se desplaza con Movimiento Rectilíneo Uniforme

Trabajo Práctico N°3
Cinemática

Movimiento Rectilíneo Uniforme

1. Considerando una partícula que se mueve en línea recta, grafique los vectores posición para:

a) t =0 s y x= 2 m; b) t =1 s y x= 2,5 m; c) t =3 s y x= 3 m; d) t=5 s y x= 6 m

2. Considerando las posiciones del ejercicio 1, calcule y grafique los vectores desplazamiento para los intervalos de tiempo:

a) (0,1) s; b) (0,3) s ; c) (1,3) s; d) (3,5) s; e) (1,5) s; f) (0,5) s

3. Calcule la velocidad media para los intervalos de tiempo del ejercicio 2, indicando módulo, dirección y sentido, grafique.

4. Si un tren circula a 240 km/h, cuanto tiempo tardará en recorrer 500 km?

5. Si un auto mantiene constante su velocidad de 110 k/h, ¿que distancia recorrerá en 24 min?

6. Un automóvil circula a 120 km/h y otro a 30 m/s, indique cuanto tiempo tardan en recorrer 45 km.

7. Considere una partícula que se desplaza de la manera siguiente para t =0 s, x= 2 m; t =4 s y x= 6 m, para t =8 s y x= 15 m y para t= 12 s retrocede 8 m. Calcule el camino recorrido y el desplazamiento.

8. Si el registro de la posición con respecto al tiempo, de un automóvil que desciende por una colina es la siguiente, encuentre la velocidad promedio y la velocidad media del automóvil durante:
a) el primer segundo,
d) durante los cuatro primeros segundos
c) durante todo el descenso.

x(m)	**0**	**9**	**16**	**25**	**32**	**36**	**38**
t (s)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

9. Un ciclista viaja hacia el Sur durante 35 min a 20 km/h, se detiene durante 25 min. Después continúa hacia el Este, recorriendo 50 km en 2 h. Indique:
a) ¿cuál es su desplazamiento?
b) ¿Qué distancia recorrió?
c) ¿cuál es su velocidad promedio? ¿ y la velocidad media?

10. Un maratonista avanza en línea recta con una velocidad promedio de + 5 m/s durante 8 min, y después con una velocidad promedio de + 4.00 m/s durante 6 min. Indique su velocidad promedio durante este tiempo?

11. Si la ecuación en función del tiempo para una partícula es x= 4 + 2.t, donde x se mide un m y t en segundos, indique:

a) la posición de la partícula para:

i) el instante inicial

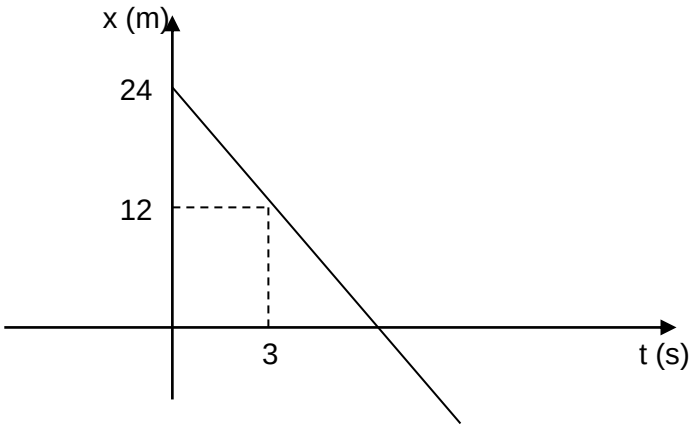
ii) t= 6 s

iii) t = 12 s

b) el desplazamiento a cabo de 1 s

c) el tiempo para que la partícula se encuentre a 16 m del origen de coordenadas

12. Considere el gráfico de una partícula que se mueve con MRU



Determine:

a) la posición inicial

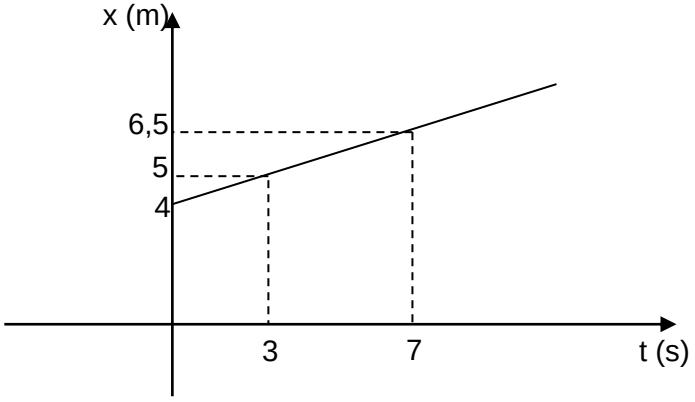
b) la velocidad media

c) el desplazamiento en el intervalo (0,6) s

d) la ecuación de x=x(t)

13. Si dos ómnibus salen al mismo tiempo, y en sentido contrario de dos ciudades separadas 550 km, y se desplazan a velocidad constante de 100 y 90 km/h, calcule la distancia a la que se encontrarán y el tiempo que tardarán en llegar al punto de encuentro. Grafique.

14. Considere el gráfico de una partícula que se mueve con MRU



Determine:

e) la posición inicial

f) la velocidad media

g) el desplazamiento en el intervalo (0,7) s

h) la ecuación de x=x(t)

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

Para describir este movimiento se necesita un nuevo concepto, el de aceleración.

Aceleración

La aceleración es una magnitud vectorial cuyo módulo mide el cambio de la velocidad por cada unidad de tiempo. Físicamente, el módulo de la aceleración mide la rapidez con la cual varía la velocidad. Se denota con $\vec{a}$.

Si la velocidad de una partícula varía con el tiempo, la partícula sufre una aceleración y el movimiento es variado.

La **aceleración media** entre los instantes t_1 y t_2 está definida por la siguiente fórmula:

$$\vec{a}_{m\,12} = \frac{\vec{\Delta v}_{12}}{\Delta t_{12}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Al igual que la velocidad media su interpretación geométrica involucra un gráfico de la velocidad en función del tiempo, es decir $\vec{v}$ =f(t). Por lo tanto para cada instante de tiempo existe un valor determinado de velocidad. Si se grafica esta función se obtiene una curva como la representada en la Fig. 2.8. Si se traza la recta secante por los puntos S y U, su pendiente representa la aceleración media en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$

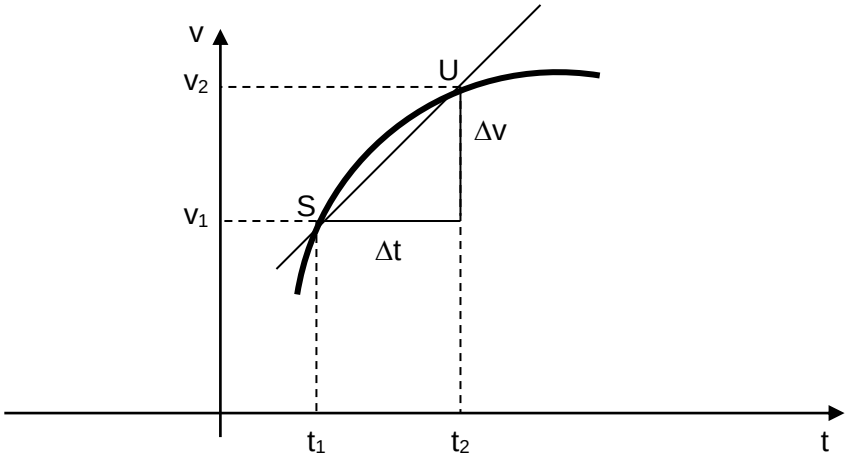


Figura 2.8. Interpretación geométrica de la aceleración media

Cuanto mayor es la pendiente mayor es el módulo de la aceleración media.

La ecuación dimensional para la aceleración es: $a = LT^{-2}$, su unidad en el S. I es m/s^2.

Una partícula posee movimiento rectilíneo uniformemente variado si cumple las siguientes condiciones:

1. La trayectoria que recorre es una línea recta.

2. La aceleración (a) es constante

Que la aceleración sea constante implica que la velocidad es proporcional al tiempo

En la Figura 2.12 se representa a= a(t):

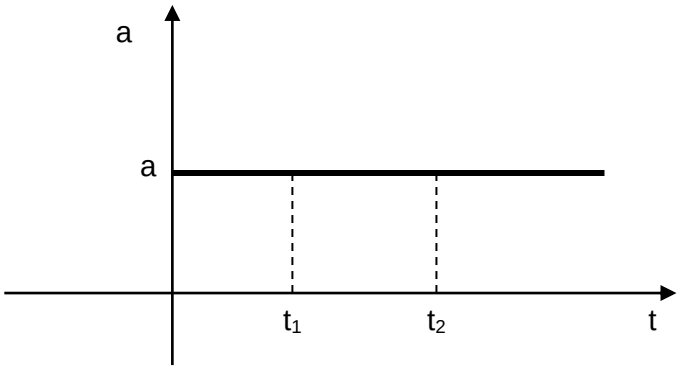


Figura 2.12. Representación de aceleración vs. tiempo para una partícula que se desplaza con Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

Como se observa en la figura anterior, $\vec{a} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \text{cons tan te}$, el signo de la aceleración (recordar que es una magnitud vectorial) coincide con el de la velocidad puesto *que el tiempo es siempre positivo.*

El gráfico de la velocidad en función del tiempo es una recta de pendiente constante, negativa o positiva de acuerdo con el sentido del movimiento (Ver ejemplo en la Figura 2.13).

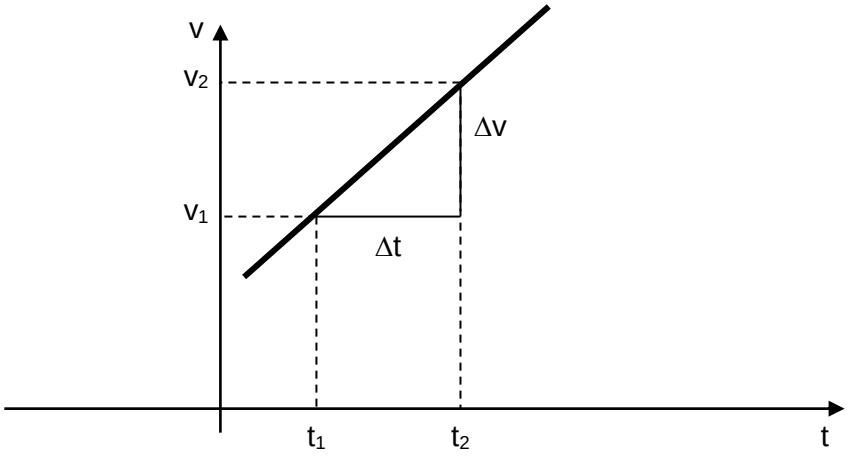


Figura 2.13. Representación velocidad vs. tiempo para una partícula que se desplaza con Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

De la ecuación $\vec{a} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \text{cons tan te}$, se puede despejar la velocidad (para simplificar la notación se escribe v en lugar de $\vec{v}$, lo mismo para el desplazamiento, la aceleración, pero recordando siempre que son magnitudes vectoriales. Considerando además que el tiempo inicial se denota con t_0 y la velocidad inicial con v_0.

$$\vec{\Delta v} = \vec{a}\,\Delta t$$

$$v - v_0 = a.(t - t_0) \Rightarrow v = v_0 + a.(t - t_0)$$

$v = v_0 + a.(t - t_0)$ es la ecuación de la velocidad en función del tiempo para el MRUV.

Como puede verse esta ecuación indica que la velocidad es una función de primer grado del tiempo.

Puede suceder que t_0=0, entonces:

$$v = v_0 + a.t$$

Si v_0=0, la ecuación queda reducida a:

v = a.t (su representación es una recta que pasa por el origen de coordenadas).

Para conocer la ecuación temporal de la posición para el MRUV, se considera el significado físico del área encerrada por la curva v=v(t) y el eje temporal, que como se desarrolló para el MRU corresponde al desplazamiento. De la Figura 2.14 se tiene que el área involucrada corresponde al área de un trapecio que a su vez puede considerarse formado por un triángulo rectángulo y un rectángulo.

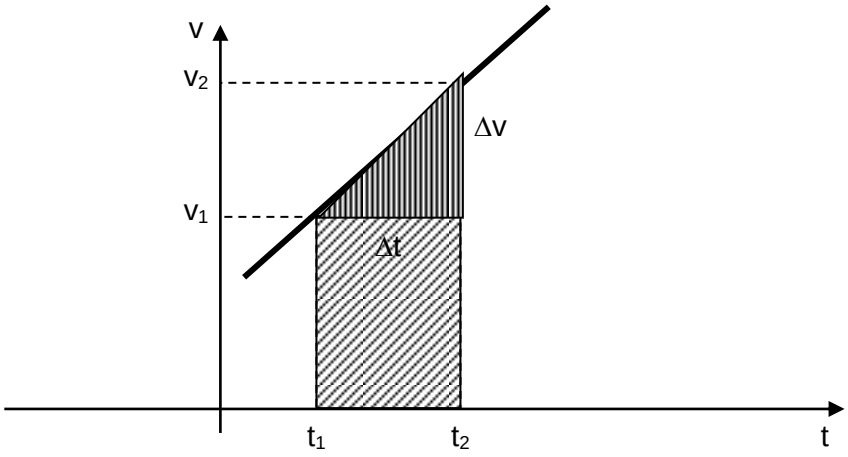


Figura 2.14. Area encerrada por la curva del gráfico velocidad vs. tiempo para una partícula que se desplaza con Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

El área del triángulo es: $\frac{1}{2}\Delta v.\Delta t$, la del rectángulo es $\Delta t.v_1$, por lo tanto el desplazamiento Δx en el intervalo $\Delta t = t - t_0$ es:

$$\Delta x = v_1 \Delta t + \frac{1}{2}\Delta v \Delta t$$

Como $\Delta v = a.\Delta t$, se tiene:

$$\Delta x = v_1 \Delta t + \frac{1}{2} a.\Delta t^2$$

$$x_2 - x_1 = v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a.(t_2 - t_1)^2$$

Si t_1=0 y t_2 = t, y x_1=x_0 y x_2=x, se puede escribir una ecuación más simple que es:

$$x = x_0 + v_0.t + \frac{1}{2}a.t^2$$

Si además x_0=0 y v_0=0, la ecuación es:

$$x = \frac{1}{2}a.t^2$$

La representación gráfica de la posición en función del tiempo para un MRUV es la que se presenta en la Fig. 2.15.

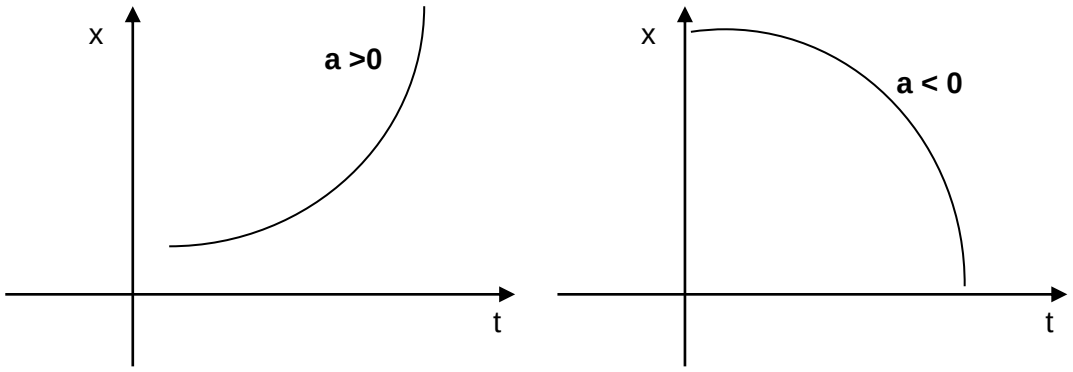


Figura 2.15. Posición vs. tiempo para una partícula que se desplaza con Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

Trabajo Práctico N°4
Cinemática

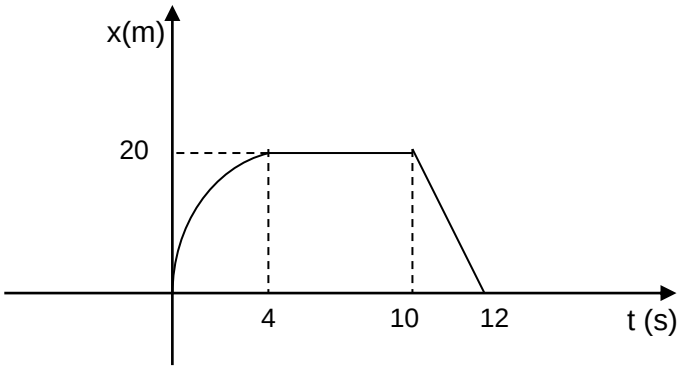
Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

1. Calcule la aceleración de un auto que a los 20 s de ponerse en marcha alcanza una velocidad de 25 km/h.

2. Si un motociclista circula 40 km/h , frena y se detiene a los 3 s, indique la aceleración y la distancia a la que se detiene.

3. Una partícula se desplaza a 20 m/s y la aceleración constante es 1,5 m/s^2, calcule la velocidad luego de 30 s y la posición al cabo de ese tiempo.

4. Si una partícula se mueve sobre una recta de forma tal que su posición varía con el tiempo como se indica en el gráfico:



Determine:

a) la velocidad media en los intervalos (0,4); (4,10); (10,12); (0,12)

b) describa el movimiento de la partícula

c) represente esquemáticamente v=v(t)

5. La ecuación v= 4 t +6 representa la velocidad en función del tiempo para una partícula que se mueve sobre el eje x. Donde v se mide en m/s y el tiempo en s. Calcule:

a) la velocidad en el instante inicial

b) la velocidad en t= 4, 10 y 12 s

c) la aceleración

d) la variación de la velocidad al cabo de 4 s

e) la ecuación de x=x(t) para x_0= 5 m

f) el desplazamiento a los 4 s.

6. Considere el gráfico de v=v(t) para una partícula se mueve con MRUV y determine:

a) la velocidad inicial de la partícula

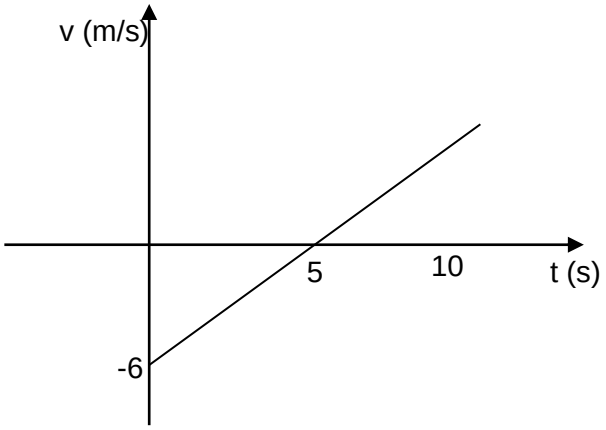
b) su aceleración media

c) la aceleración a los 5 s

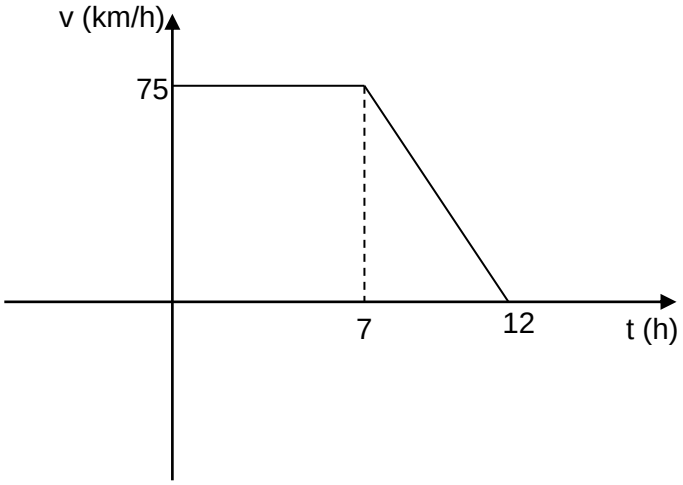
d) el desplazamiento en el intervalo (0,5) s

e) la velocidad media en el intervalo (0,10) s

f) la ecuación x=x(t)



7. El gráfico v= v(t) para una partícula es:



Indique:

a) la velocidad media; b) la aceleración media

8. Una partícula se mueve con una velocidad inicial de 50 m/s en 30 s, la velocidad disminuye uniformemente hasta cero. ¿Cuál es la aceleración promedio durante ese intervalo?

9. Si la ecuación temporal de la posición de una partícula es $x= 4 + 2t + 5t^2$ cuyas unidades son m para la posición y segundos para el tiempo, determine la velocidad y la aceleración de la misma.

Bibliografía

- Resnik, R.; Halliday, D.; Krane K. 2001. Física Vol. 1. 4º Edición. Compañía Editorial Continental. Mexico.

-Ledesma, M.M. 2009. Ingreso 2009. Area disciplinar: Física. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías. Universidad Nacional de Santiago del Estero.

- Anríquez, C.; Biasoni, E.; Sain, P.; Santucho López, D. 2008. Física para el Ingreso 2008-2009. Facultad de Agronomía y Agroindustrias. Universidad Nacional de Santiago del Estero.

- Hewitt, P. 1999. Física conceptual. Ed. Prentice Hall, México.